FEUILLE DE TD

Polynômes d'endomorphismes

2 DÉCEMBRE 2022

Exercice 1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable. Trouver $P \in \mathbb{K}[X]$ non-nul tel que $P(A) = 0$.

Comme A est diagonalisable, il existe une matrice inversible P et des nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$P^{-1}AP = \text{Diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\,.$$

On pose $Q(X) = \pi_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$.
Alors, on a $Q(\text{Diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \text{Diag}\,(Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n)) = 0$.
On obtient ainsi :

$$Q(A) = Q(P\,\text{Diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\,P^{-1}) = PQ(\text{Diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n))P^{-1} = 0,$$

ce qui conclut.

Note : On a montré que $\chi_A(A) = 0$. On démontrera ce résultat pour toute matrice carrée dans le cours (théorème de Cayley-Hamilton).

Exercice 2. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes qui sont premiers entre eux. Existe-t-il $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P(A) = Q(A) = 0$?

D'après le théorème de Bézout, comme $pgcd(P, Q) = 1$, il existe $R, S \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(X).R(X) + Q(X).S(X) = 1$.
Si on avait $P(A) = Q(A) = 0$, on aurait alors

$$I_n = (R.P + S.Q)(A) = R(A).P(A) + S(A).Q(A) = 0 + 0 + 0,$$

ce qui est impossible.

Une telle matrice A n'existe pas.

Exercice 3. Soient $n \geq 1$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit $J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & \\ 0 & & \ddots & & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & \end{pmatrix}$.

Trouver un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non-nul tel que $P(J_n(\lambda)) = 0$.
• Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer $Q(J_n(\lambda))$ en fonction de $N = J_n(\lambda) - \lambda I_n$.

On pose $N = J_n(\lambda) - \lambda I_n$. N est une matrice avec des 1 juste au-dessus de la diagonale, et 0 ailleurs ($n_{i,i+1} = 1$, $n_{i,j} = 0$ si $j \neq i + 1$).
Montrons que cette matrice est nilpotente, avec $N^n = 0$.
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On a alors $N(e_1) = 0$, $N(e_2) = e_1$, ..., $N(e_n) = e_{n-1}$.
En posant $x = e_n$, on a donc $N^k(x) = e_{n-k}$ pour $0 \leq k \leq n-1$, et $N^n(x) = NN^{n-1}(x) = N(e_1) = 0$.
On en déduit donc que $N^n(e_i) = N^n(N^{n-i}(x)) = N^{n-i}.N^n(x) = 0$.
Pour tout $z \in \mathbb{K}^n$, z s'écrit $z = z_1e_1 + \dots + z_ne_n$.
Cela donne : $N^n(z) = \sum_{i=1}^n z_i N^n(e_i) = 0$.
On a bien montré que $N^n = 0$, c'est-à-dire que $(J_n(\lambda) - \lambda I_n)^n = 0$.
En posant $P(X) = (X - \lambda)^n$, on obtient le résultat.

Note : Le polynôme P est exactement $\chi_{J_n(\lambda)}$. On a montré dans ce cas particulier que le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur. Le cas général sera vu en cours.

• Soit $m = \deg(Q)$. En utilisant la formule de Taylon en λ, on a

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!}(X - \lambda)^k,$$

donc

$$P(J_n(\lambda)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!} N^k.$$

Le calcul de la question précédente permet de déterminer les puissances de N, qui ont une expression simple.
On en conclut que

$$P(J_n(\lambda)) = \begin{pmatrix} P(\lambda) & P'(\lambda) & \frac{P''(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{P^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{P''(\lambda)}{2!} \\ & & & \ddots & P'(\lambda) \\ (0) & & & & P(\lambda) \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Soit $A_\sigma \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de permutation associée à σ : $A_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})$.
On écrit $\sigma = c_1 \cdot \ldots c_r$ la décomposition de σ en produit de cycles à support disjoint.
Trouver deux polynômes P tels que $P(A_\sigma) = 0$.
Que peut-on dire sur le spectre de A_σ ?

On sait que $A_\sigma.A_\tau = A_{\sigma\tau}$ (démonstration facile en utilisant les coefficients).
• Le groupe des permutations $\mathcal{S}_n$ est de cardinal $n!$.
D'après le théorème de Lagrange, on a donc $\sigma^{n!} = Id$. Ainsi, pour $P(X) = X^{n!} - 1$, on a $P(A_\sigma) = 0$.
Note : Comme $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension n^2, on sait qu'il existe des polynômes annulateurs de A de degré inférieur à n^2, donc ce polynôme P n'est pas optimal du tout.
• Notons k_i la longueur du cycle c_i. On sait alors que $c_i^{k_i} = Id$. On pose $k = ppcm(k_1, \ldots, k_r)$.
Alors, on a $\sigma^k = c_1^{k_1} \ldots c_r^{k_r} = Id$, car les cycles c_i sont à support disjoint.
Ainsi, pour $Q(X) = X^k - 1$, on a $Q(A) = 0$.
Note : Ce polynôme Q est bien de degré $\leq n^2$, car $r \leq n$ et car $k_i \leq n$. Par contre, il n'est pas toujours optimal (au sens du plus petit polynôme annulateur). On montrera dans le cours qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ a un polynôme annulateur de degré $\leq n$, et on n'a pas toujours $\deg(Q) \leq n$ (par exemple $n = 5$, $r = 2$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$).
• Soit $\lambda \in \text{Spec}\,(A_\sigma)$. On a alors $x \in \mathbb{K}^n$ non-nul tel que $A_\sigma(x) = \lambda x$.
On obtient ainsi que $0 = Q(A)(x) = Q(\lambda)x$, d'où $Q(\lambda) = 0$.
Donc, le spectre de A_σ est inclus dans l'ensemble des racines k-èmes de l'unité (et donc inclus dans l'ensemble des racines $n!$-èmes de l'unité).

Note : Avec un polynôme annulateur, on a des informations sur le spectre sans utiliser le polynôme caractéristique.

Exercice 5. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = 0$.
On suppose que $P(0) \neq 0$. Montrer que $A \in Gl_n(\mathbb{K})$ et calculer A^{-1}.

On a $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_m X^m$, avec $a_0 = P(0) \neq 0$.
La relation $P(A) = 0$ donne : $a_m A^m + \ldots + a_1 A + a_0 I_n = 0$
$\Leftrightarrow A(a_m A^{m-1} + \ldots + a_1) = -a_0 I_n$
$\Leftrightarrow A(\frac{-1}{a_0}(a_m A^{m-1} + \ldots + a_1)) = I_n$
La matrice $B = \frac{-1}{a_0}(a_m A^{m-1} + \ldots + a_1)$ est un polynôme en A, donc elle commute avec A.
On en déduit donc que $AB = BA = I_n$, donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{-1}{a_0}(a_m A^{m-1} + \ldots + a_1)$.

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que l'on a u nilpotent si et seulement si pour tout $x \in E$ il existe $k \geq 1$ tel que $u^k(x) = 0$.
2. On suppose que $\chi_u(X) = X^n$.
   Montrer que u est nilpotent.
3. On suppose que $\chi_u(X) = X^n$. Montrer que $\chi_u(u) = u^n = 0$.

---

1. Soit $k \geq 0$ tel que $u^k = 0$. Alors, pour tout $x \in E$, on a $u^k(x) = 0$.
   Réciproquement, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soient $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}^*$ tels que $u^{k_i}(e_i) = 0$.
   On pose $k = \max(k_1, \ldots, k_n)$.
   Alors, on a $u^k(e_i) = 0$, pour tout $1 \leq i \leq n$.
   Soit $x \in E$. On a $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$. Ainsi, on a $u^k(x) = \sum_{i=1}^n x_i u^k(e_i) = 0$.
   Donc, on a $u^k = 0$. L'endomorphisme u est bien nilpotent.
2. Soit $x \in E$. On va montrer qu'il existe $k \geq 1$ tel que $u^k(x) = 0$.
   D'après les propriétés des sous-espaces cycliques, $S_u(x)$ est de dimension $r + 1$ et a pour base $(x, u(x), \ldots, u^r(x))$.
   Pour $a_0, \ldots, a_r \in \mathbb{K}$ tels que $u^{r+1}(x) = -a_r u^r(x) - \ldots - a_1 u(x) - a_0 x$, on a alors :
   $$\chi_{u_{S_u(x)}} = X^{r+1} + a_r X^r + \ldots + a_1 X + a_0.$$
   Or, on sait aussi que $\chi_{u_{S_u(x)}}$ divise χ_u. Comme on a $\chi_u(X) = X^n$, on en déduit que $\chi_{u_{S_u(x)}} = X^{r+1}$.
   Ainsi, on a $u^{r+1}(x) = 0$.
   Donc, pour tout $x \in E$ il existe $k \geq 1$ tel que $u^k(x) = 0$. Cela veut dire que u est nilpotent.
3. D'après la question précédente, on sait que u est nilpotent.
   Reprenons les idées des deux premières questions.
   Réciproquement, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
   Soit d_i la dimension du sous-espace cyclique $S_u(e_i)$. Alors, on a $u^{d_i}(e_i) = 0$ d'après la preuve de la question (2).
   En prenant $d = \max(d_1, \ldots, d_n)$, on a donc d'une part que $u^d = 0$, et d'autre part que $d \leq n$ car $d_i \leq n$ pour tout $1 \leq i \leq n$.
   On en déduit donc que $\chi_u(u) = u^n = u^d.u^{n-d} = 0$.

   Note : On reverra ce résultat en cours (le théorème de Cayley-Hamilton).

Exercice 7. Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice p.

1. Montrer que $I_n - B$ est inversible et exprimer son inverse.
2. Montrer que $I_n + A^{-1}BA$ est inversible et exprimer son inverse.

3. On pose
$$H = \{I_n + P(B) / P \in \mathbb{C}[X], P(0) = 0\}$$
Montrer que H est un sous-groupe commutatif de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$

---

1. Comme B et I_n commutent, la formule de somme géométrique donne :
$$I_n = I_n - B^p = (I_n - B)\left(I_n + B + B^2 + \cdots + B^{p-1}\right),$$
donc $I_n - B$ est inversible d'inverse $I_n + B + B^2 + \cdots + B^{p-1}$.
2. Posons $N = -A^{-1}BA$. On a $N^p = (-1)^p A^{-1} B^p A = O_n$, donc N est aussi nilpotente d'indice p.
On en déduit que $I_n - N = I_n + A^{-1}BA$ est inversible d'inverse $I + N + N^2 + \cdots + N^{p-1}$.
3. — Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) = 0$. On a $P(X) = a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_mX^m$. Ainsi, $P(B) = B(a_1I_n + a_2B + \ldots + a_mB^{m-1})$. Ainsi, on a
$$P(B)^p = a_1^p B^p (a_1I_n + a_2B + \ldots + a_mB^{m-1})^p = O_n.$$
Comme cette matrice est encore nilpotente, on peut reprendre le raisonnement de la question précédente et affirmer que la matrice $I_n + P(B)$ est inversible et que son inverse est de la forme
$$I - P(B) + P(B)^2 + \cdots + (-1)^{p-1}P(B)^{p-1}.$$
Notons $Q = -P + P^2 + \cdots (-1)^{p-1}P^{p-1}$.
On trouve que $Q(0) = -P(0) + P(0)^2 + \cdots (-1)^{p-1}P(0)^{p-1} = 0$, donc
$$(I_n + P(B))^{-1} = I_n + Q(B) \in H.$$
On en déduit que H est inclus dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et que l'inverse d'un élément de H est encore dans H.
— On vérifie facilement que H est non vide, et que $(I_n + P(B))(I_n + R(B)) = I_n + (P + R + PR)(B)$, avec $(P + R + PR)(0) = 0$. Ainsi, H est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$.
— Enfin, H est inclus dans $\mathbb{K}[B]$, donc tous les éléments de H commutent entre eux.

Exercice 8. Soit E un ev de dimension n et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $B = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de E.
On pose $F_i = S_u(v_i)$ et $P_i(X) = \mu_{u_{F_i}}(X)$.
• Montrer que l'on a $\mu_u = ppcm(P_1, \ldots, P_n)$.
• Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On pose A_σ la matrice de permutation associée à σ.
On écrit $\sigma = c_1 \circ \ldots \circ c_r$ la décomposition de σ en cycles à supports disjoints.
Déterminer μ_{A_σ}.
Montrer que pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ce polynôme est à racines simples.

---

1. Soit $P = ppcm(P_1, \ldots, P_n)$.
Par définition de P_i, on a $P_i(u)(e_i) = 0$. Comme P_i divise P, on a aussi $P(u)(e_i) = 0$.
Soit $x \in E$. On a $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$.
Par linéarité de $P(u)$, on a :
$$P(u)(x) = x_1P(u)(e_1) + \ldots + x_nP(u)(e_n) = 0.$$
Ainsi, P est un polynôme annulateur de u, donc $\mu_u \mid P$.
Réciproquement, comme F_i est un sous-espace stable par u, on a $P_i = \mu_{u_{F_i}}$ qui divise μ_u.
Ainsi, $ppcm(P_1, \ldots, P_n)$ divise μ_u.
Comme ces deux polynômes sont unitaires, on en déduit que $\mu_u = P$.
2. Pour $1 \leq i \leq r$, on note l_i la longueur du cycle c_i.
On écrit alors $c_i = (m_{i,1}, \ldots, m_{i,l_i})$.
On note J_i le support du cycle c_i, c'est-à-dire $J_i = \{m_{i,1}, \ldots, m_{i,l_i}\}$.
On note $m_1, \ldots, m_s$ les points fixes de la permutation σ, et on pose $J_0 = \{m_1, \ldots, m_s\}$.
On a $s = n - (l_1 + \ldots + l_r)$.
Soit $1 \leq j \leq n$. On a $0 \leq i \leq n$ tel que $j \in J_i$.
• Si $j \in J_0$, on a $A_\sigma(e_j) = e_j$, donc le sous-espace cyclique $S_{A_\sigma}(e_j)$ est $Vect(e_j)$, et le polynôme minimal de l'endomorphisme induit est $X - 1$.
• Si $i \neq 0$, on a $A_\sigma(e_j) = e_{c_i(j)}$. Comme c_i est un cycle de longueur l_i, le sous-espace cyclique $S_{A_\sigma}(e_j)$ est $Vect(e_k,\ k \in J_i)$.
Ce sous-ev est de dimension l_i, et le polynôme minimal de l'endomorphisme induit sur ce sous-espace est $X^{l_i} - 1$.
La première partie de l'exercice nous permet de trouver l'expression de μ_{A_σ} :
$$\mu_{A_\sigma}(X) = ppcm(P_1, \ldots, P_n),$$
où $P_j(X) = (X - 1)$ si $j \in J_0$ et $P_j(X) = X^{l_i} - 1$ si $j \in J_i$, $i \neq 0$.
Comme $ppcm(P, Q, Q) = ppcm(P, Q)$, cette expression se simplifie.
Si σ possède un point fixe ($J_0 \neq \emptyset$) on a
$$\mu_{A_\sigma}(X) = ppcm(X - 1, X^{l_1} - 1, \ldots, X^{l_r} - 1).$$
Si σ ne possède pas de point fixe ($J_0 = \emptyset$) on a
$$\mu_{A_\sigma}(X) = ppcm(X^{l_1} - 1, \ldots, X^{l_r} - 1) = ppcm(X - 1, X^{l_1} - 1, \ldots, X^{l_r} - 1).$$
En effet, le polynôme $X^{l_1} - 1$ est un multiple de $X - 1$. Donc, pour toute permutation σ, on obtient :
$$\mu_{A_\sigma}(X) = ppcm(X - 1, X^{l_1} - 1, \ldots, X^{l_r} - 1).$$
Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les polynômes $X^k - 1$ sont à racines simples (ils sont premiers avec leur polynôme dérivé kX^{k-1}). Or, le ppcm de deux polynômes à racines simples est un polynôme à racines simples.
Donc, μ_{A_σ} est un polynôme à racines simples.
Si l'on pose $E = \{z \in \mathbb{U}$ tels que $z^k = 1$ pour un $k \in \{1, l_1, \ldots, l_r\}\}$, on a aussi $\mu_{A_\sigma}(X) = \Pi_{z \in E}(X - z)$.

Exercice 9. 1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Déterminer μ_A.

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice B est-elle diagonalisable ?

Déterminer μ_B. (Indication : Poser $C = B - I$)

---

1. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de A.
Comme A est diagonalisable, il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = D$.
La matrice D est de la forme $D = \mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$, où λ_i apparaît $\mu_A(\lambda_i)$ fois.
Alors, le polynôme minimal de D est $\mu_D(X) = \Pi_{i=1}^r (X - \lambda_i)$.
Comme le polynôme minimal est un invariant de similitude, on a $\mu_A = \mu_D = \Pi_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A)}(X - \lambda)$.
2. La matrice B est diagonalisable si et seulement si la matrice $C = B - I$ est diagonalisable.
La matrice C est de rang 2, avec seulement deux colonnes non-nulles et non colinéaires.
Ainsi, on a $\chi_C(X) = X^n + aX^{n-1} + bX^{n-2}$.
On a $Tr(C) = 0$, donc $a = 0$.
On remarque que $X = e_1 - e_n$ est un vecteur propre de C, avec $CX = e_n - e_1 = -X$.
Comme $\chi_C(X) = X^{n-2}(X^2 + b)$, les valeurs propres non-nulles de C sont opposées.
Ces valeurs propres sont donc 1 et -1, d'où $\chi_C(X) = X^{n-2}(X - 1)(X + 1)$.
Si $n = 2$, on a $\chi_C(X) = (X - 1)(X + 1)$, donc C est diagonalisable (de valeurs propres 1 et -1) et B est diagonalisable.
Pour $n > 2$, les valeurs propres de C sont $0, 1, -1$.
Pour chaque valeur propre $(0, 1, -1)$, on a $\dim(E_\lambda(C)) = m_C(\lambda)$, donc la matrice C est diagonalisable.
Ainsi, en revenant à $B = C + I$, la matrice B est diagonalisable, de valeurs propres $0, 1, 2$.
On obtient ainsi que $\mu_B(X) = X(X - 1)(X - 2)$.
Autre méthode : En calculant C^2, C^3, on remarque que $C^3 = C$. Ainsi, $X^3 - X$ est un polynôme annulateur de C. Le polynôme minimal de C, μ_C divise $X^3 - X$, donc le spectre de C est inclus dans $\{0, 1, -1\}$. On peut ensuite chercher la dimension des sous-espaces propres ($\dim(E_0(C) = n - 2$ car C est de rang $n - 2$,...), pour trouver que C est diagonalisable, et que B est diagonalisable.

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Déterminer μ_A.

Montrer que pour toute suite récurrente $(X_n)_n \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ qui vérifie $X_{n+1} = AX_n$, la suite $(X_n)_n$ est bornée.

• Le calcul de χ_A donne $\chi_A(X) = X^3 - X^2 - X + 1 = (X-1)(X-i)(X+i) = (X-1)(X^2+1)$.
D'après le théorème de Hamilton-Cayley, on a $\mu_A \mid \chi_A$, donc μ_A est un diviseur de $(X - 1)(X - i)(X + i)$.
La matrice A est ainsi diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$, elle est semblable à la matrice $\mathrm{Diag}\,(1, i, -i)$. Le polynôme minimal de cette matrice diagonale est $(X - 1)(X - i)(X + i)$.
Donc le polynôme minimal de A dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ est $\mu_A = \chi_A$.
Maintenant, comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, tout polynôme réel annulateur de A est un polynôme complexe annulateur de A. Vu que χ_A est à coefficients réels, on en déduit que $(X - 1)(X^2 + 1)$ est le polynôme minimal de A dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
• Comme les valeurs propres de A sont $1, i, -i$ et comme A est de taille $3x3$, la matrice A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$, et donc $A^4 = I_3$.
La suite récurrente $(X_n)_n$ est donc périodique de période 4, peu importe le choix de X_0.
Cette suite est donc bornée.

Exercice 11. Soient $n \geq 1$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit $J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & \end{pmatrix}$.

Déterminer $\mu_{J_n(\lambda)}$.

On a vu dans le TD 7 que la matrice $J_n(\lambda)$ est annulée par $(X - \lambda)^n$, ce que l'on retrouve avec le théorème de Cayley-Hamilton.
Cela veut dire que pour $N = J_n(\lambda) - \lambda I_n$, la matrice N est nilpotente.
Or, on a $N(e_n) = e_{n-1}$, $N(e_{n-1}) = e_{n-2}$, ..., $N(e_2) = e_1$ et $N(e_1) = 0$.
On en déduit donc que pour $1 \leq k \leq n - 1$, on a $N^k(e_n) = e_{n-k}$. En particulier, on a $N^{n-1}(e_n) = e_1$, donc $N^{n-1} \neq 0$.
Etant donné que $N^n = 0$ et $N^{n-1} \neq 0$, on en déduit que $\mu_N(X) = X^n$.
Comme $J_n(\lambda) = N + \lambda I_n$, on obtient ainsi que $\mu_{J_n(\lambda)} = (X - \lambda)^n$.

Exercice 12. Soit $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ avec $u(P)(X) = P(X + 1)$.

• Déterminer μ_u. (On pourra étudier $v = u - Id$).

• On se place maintenant sur $(\mathbb{Z}/2Z)_5[X]$, avec $v(P(X)) = P(X+1)$. Déterminer μ_v.

---

1. Pour tout polynôme P, on a $\deg(u(P)) = \deg(P)$.
   Cela implique que la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure.
   De plus, comme $u(X^k) = (X+1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k$, le coefficient dominant de $u(P) = P(X+1)$ est égal au coefficient dominane de $P(X)$. Cette matrice a donc des 1 sur sa diagonale.
   Son polynôme caractéristique vaut $(X-1)^{n+1}$, et le théorème de Cayley-Hamilton nous dit que $\mu_u(X) \mid (X-1)^{n+1}$, c'est-à-dire $(u-Id)^{n+1} = 0$.
   Cela veut dire que l'endomorphisme $u - Id$ est nilpotent. On cherche à calculer son indice de nilpotence.
   Prenons $P(X) = aX^m$.
   Si P est constant, on a $u(P) = P$ donc $u(P) - P = 0$.
   Sinon, on a $m \geq 1$ et $u(P) - P = P(X+1) - P(X) = amX^{m-1} + ...$, polynôme de degré $m-1$.
   Ainsi, pour $1 \leq k \leq n$, le polynôme $(u-Id)^k(X^n)$ est de degré $n-k \geq 0$, et de coefficient dominant $n(n-1)\dots(n-k+1)$. Ce polynôme est non-nul, donc l'endomorphisme $(u-Id)^k$ n'est pas l'endomorphisme nul.
   Le plus petit entier k tel que $(u-Id)^k = 0$ est donc $k = n+1$.
   On a donc $u - Id$ nilpotent d'indice $n+1$, donc $\mu_u(X) = (X-1)^{n+1}$.
2. Dans le corps $\mathbb{Z}/2Z$, on a $1+1 = 0$.
   Cela implique par exemple que $X^2 - (X+1)^2 = -2X^-1 = -1$, ce qui va changer le résultat de certains calculs.
   On trouve à nouveau que v a pour polynôme caractéristique $(X-1)^{n+1} = (X-1)^6$ et que donc $(v-Id)^6 = 0$.
   La matrice de u dans la base canonique $(1, X, \dots, X^5)$ est
   $$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   On a donc $1-1 = 0$, $(X+1)-X = 1$, $(X+1)^2 - X^2 = 1$, $(X+1)^3 - X^3 = X^2 + X + 1$, $(X+1)^4 - X^4 = 1$, $(X+1)^5 - X^5 = X^4 + X + 1$.
   Ainsi, on a $(v-Id)(1) = 0$, $(v-Id)^2(X) = (v-Id)^2(X^2) = (v-Id)^2(X^4) = 0$, $(v-Id)^2(X^3) = 1+1+0 = 0$, $(v-Id)^2(X^5) = 1+1+0 = 0$.
   Donc, on a $(v-Id)^2 = 0$ et $(v-Id) \neq 0$.
   On en déduit que $\mu_v(X) = (X-1)^2$.

   Autre méthode : En posant $Q_0(X) = 1$, $Q_1(X) = X$, $Q_2(X) = X(X-1)$, $Q_k(X) = X(X-1)\dots(X-k+1)$, pour $k \geq 1$, la famille $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
   On remarque que l'on a $Q_1(X+1) - Q_1(X) = 1 - 1 = 0$, et pour $k \geq 1$,
   $$Q_k(X+1) - Q_k(X) = (X+1)X(X-1)\dots(X-k+2) - X(X+1)\dots(X-k+1) = X\dots(X-k+2)(X+1-($$
   On a donc : $(u-Id)(Q_0) = 0$ et $(u-Id)(Q_k) = kQ_{k-1}$, pour tout $k \geq 1$.
   Pour $K = \mathbb{R}$, on retrouve le fait que $u - Id$ est nilpotent d'ordre n.
   Maintenant, soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique p (p un nombre premier, par exemple $\mathbb{Z}/pZ$). On remarque alors que $(u-Id)Q_k = k.Q_{k-1}$ est le polynôme nul si k est un multiple de p, et que kQ_{k-1} n'est pas nul sinon (polynôme de degré $k-1$, de coefficient dominant k).
   En prenant $p = 2$ et $n = 5$, cela permet d'obtenir facilement le polynôme minimal de $u - Id$. On remarque que pour tout polynôme Q_k on a $(u-Id)^2(Q_k) = 0$. De plus, $(u-Id)(Q_3) = 3Q_2 \neq 0$. Donc, on a $\mu_{u-Id}(X) = X^2$, donc $\mu_u = (X-1)^2$.

Exercice 13. 1. Soit $M = \mathrm{Diag}\,(A_1, \dots, A_r)$ une matrice diagonale par blocs, avec $A_i \in \mathscr{M}_{n_i}(\mathbb{K})$.
Déterminer $\mu_M(X)$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathscr{M}_{n_1}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n_2}(\mathbb{K})$.
   Montrer que l'on a $ppcm(\mu_A, \mu_B) \mid \mu_M$ et $\mu_M \mid \chi_A \chi_B$.
   Puis, montrer que l'on a $\mu_M \mid \mu_A \mu_B$.
3. Soit $M = \begin{pmatrix} A_1 & & (*) \\ & \vdots & \\ (0) & & A_r \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire supérieure par blocs, avec $A_i \in \mathscr{M}_{n_i}(\mathbb{K})$.
   Montrer que l'on a $\mu_M \mid \Pi_{i=1}^r \mu_{A_i}$.
   Ces deux polynômes sont-ils toujours égaux / toujours distincts ?

---

1. Pour $P \in \mathbb{K}[X]$ on a $P(M) = \mathrm{Diag}\,(()\, P(A_1), \dots, P(A_r))$. Ainsi, si $P(M) = 0$ on a $P(A_1) = 0, \dots, P(A_r) = 0$.
   Donc, pour tout i, on a $\mu_{A_i} \mid \mu_M$. Cela implique que $ppcm(\mu_{A_1}, \dots, \mu_{A_r}) \mid \mu_M$.
   Réciproquement, montrons que $ppcm(\mu_{A_1}, \dots, \mu_{A_r})$ est un polynôme annulateur de M.
   Le polynôme $P = ppcm(\mu_{A_1}, \dots, \mu_{A_r})$ est un multiple de $\mu_{A_1}, \dots, \mu_{A_r}$. On a donc $P(A_i) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq r$. Cela donne donc $P(M) = 0$.
   Comme P est un polynôme annulateur de M, on a $\mu_M \mid P$.
   D'où, $\mu_M = ppcm(\mu_{A_1}, \dots, \mu_{A_r})$.
2. D'après le théorème de Hamilton-Cayley, on a $\mu_M \mid \chi_M$. Pour une matrice triangulaire par blocs, on a $\chi_M = \chi_A \chi_B$. Donc $\mu_M \mid \chi_A \chi_B$.
   Pour P un polynôme, on a $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & * \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}$, donc un polynôme annulateur

de M est un polynôme annulateur de A et de B.
On obtient à nouveau que $\mu_A \mid \mu_M$ et $\mu_B \mid \mu_M$, c'est-à-dire $ppcm(\mu_A, \mu_B) \mid \mu_M$.
Posons maintenant $P = \mu_A\mu_B$.
La matrice $P(M)$ est de la forme $P(M) = \begin{pmatrix} 0 & (*) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il faut montrer que ce bloc $(*)$ est nul.
Les matrices $\mu_A(M)$ et $\mu_B(M)$ sont triangulaires supérieures par blocs, de la forme :
$\mu_A(M) = \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ 0 & \mu_A(B) \end{pmatrix}$ et $\mu_B(M) = \begin{pmatrix} \mu_B(A) & B_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On obtient donc :

$$P(M) = (\mu_A\mu_B)(M) = \mu_A(M)\mu_B(M) = \begin{pmatrix} 0.\mu_B(A) + A_1.0 & 0.B_1 + A_1.0 \\ 0.\mu_B(A) + \mu_A(B).0 & 0.B_1 + \mu_A(B).0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi on $P(M) = 0$, ce qui implique que μ_M divse $\mu_A\mu_B$.

3. On démontre par récurrence sur $r \geq 2$ le résultat.
Pour $r = 2$, nous venons de le démontrer.
Soit $r \geq 2$. On suppose que le résultat est vrai pour r.
Soit $M = \begin{pmatrix} A_1 & & (*) \\ & \vdots & \\ (0) & & A_{r+1} \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire par blocs, avec $r+1$ blocs diagonaux.
Alors, on a $M = \begin{pmatrix} A' & (*) \\ 0 & A_{r+1} \end{pmatrix}$, où A' est une matrice carrée de taille $n_1 + \ldots + n_r$.
D'après la question précédente, on a $\mu_M \mid \mu_{A'}\mu_{A_{r+1}}$.
D'après l'hypothèse de récurrence, on a $\mu_{A'} \mid \mu_{A_1} \cdots \mu_{A_r}$.
On obtient ainsi $\mu_M \mid \Pi_{i=1}^{r+1} \mu_{A_i}$, ce qui termine la récurrence.
• Pour $M = \text{Diag}\,(A_1, \ldots, A_r)$ une matrice diagonale, on a $\mu_M = ppcm(\mu_{A_1}, \ldots, \mu_{A_r})$.
Si les polynômes minimaux μ_{A_i} ne sont pas premiers entre eux deux à deux, ce *ppcm* est différent de $\Pi_{i=1}^{r} \mu_{A_i}$.
Pour M une matrice triangulaire avec une rangée de 1 au-dessus de la diagonale et 0 partout ailleurs ($M(e_1) = 0$, $M(e_i) = e_{i-1}$), la matrice M est triangulaire supérieure.
Les matrices $A_i = (0)$ sont des blocs diagonaux de M, avec $\mu_{A_i}(X) = X$.
La matrice M est nilpotente, et son polynôme minimal est $\mu_M(X) = X^n = \Pi_{i=1}^{r} \mu_{A_i}$.
Dans cette relation de divisibilité on peut donc avoir l'égalité, mais pas toujours.

Exercice 14. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E.
Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ qui commute avec u. Montrer que v est un polynôme en u.
Déterminer la dimension de $Com(u) = \{w \in \mathcal{L}(E)$ tels que $wu = uw\}$.

• On va montrer que comme v commute avec u ($uv = vu$), l'endomorphisme v est entièrement déterminé par le choix du vecteur $v(x)$.
Pour cela, on écrit $v(x) = a_0x + a_1u(x) + \ldots + a_{n-1}u^{n-1}(x)$ la décomposition de $v(x)$ dans la base $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$. On va montrer que $v = P(u)$ avec $P(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_{n-1}X^{n-1}$.
On a $v(x) = P(u)(x)$.
Comme u et v commutent, on a $v(u(x)) = u(v(x))$. Donc $v(u(x)) = u(P(u))(x) = P(u)(u(x))$.
Comme u et v commutent, v commute avec les puissances de u. On a ainsi $v(u^k(x)) = u^k(v(x)) = u^k(P(u)(x)) = P(u)(u^k(x))$.
Ainsi, les endomorphismes v et $P(u)$ sont égaux sur une base de E. On obtient donc que $v = P(u)$. v est un polynôme en u, et cet endomorphisme est entièrement déterminé par l'image du vecteur x.
• On en déduit que l'ensemble $Com(u)$ est égal à $\mathbb{K}[u]$.
On a $E = S_u(x)$. Ainsi, la matrice de u dans la base $B = (x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une matrice compagnon de taille nxn.
On a vu en cours qu'une matrice compagnon C_Q a pour polynôme caractéristique Q, et pour polynôme minimal Q. Le polynôme minimal de u est donc égal à son polynôme caractéristique, et est de degré n.
On en déduit que $\mathbb{K}[u] = Vect(Id, u, \ldots, u^{n-1})$, et que la famille $(Id, u, \ldots, u^{n-1})$ est une base de ce sous-ev.
Le commutant de u est donc de dimension n.

Autre méthode : Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ on peut associer l'endomorphisme $P(u) \in \mathbb{K}[u]$. Comme la famille $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E, l'application linéaire $P \mapsto P(u)(x) \in E$ est injective.
Donc, l'application $P \mapsto P(u)$ est injective. Ainsi, $\mathbb{K}[u]$ contient un sous-ev de dimension n.
Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme minimal de u est de degré au plus n. Ainsi, le sous-ev $\mathbb{K}[u]$ est de dimension au plus n.
Donc $\mathbb{K}[u]$ est de dimension n, et $Com(u) = \mathbb{K}[u] = \mathbb{K}_{n-1}[u] = Vect(Id, u, \ldots, u^{n-1})$.

Exercice 15. Soit E un e.v. de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Enoncer 3 propriétés du polynôme caractéristique.
2. Enoncer 3 propriétés du polynôme minimal.
3. Enoncer 2 propriétés des sous-espaces propres.
4. Enoncer le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux. Pour quels polynômes P le lemme des noyaux est-il intéressant ?
5. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $m \geq 1$ tels que $F = Ker((u - \lambda Id_E)^m) \neq \{0\}$. Que peut-on dire sur u_F ?

---

1. On a $\chi_u(X)$ unitaire, de degré n, avec $\chi_u(0) = (-1)^n \det(u)$. On a aussi $\text{Spec}\,(u) = \{$ racines de $\chi_u\}$ et $\chi_u(u) = 0$.

2. On a μ_u unitaire, avec $1 \leq \deg(\mu_u) \leq n$, $\mu_u \mid \chi_u$, et $P(u) = 0$ si et seulement si $\mu_u \mid P$.
3. Pour $E_\lambda(u)$ un sous-espace propre de u qui n'est pas réduit à $\{0\}$, on a $1 \leq \dim(E_\lambda(u) \leq \mu_u(\lambda)$.
Les sous-espaces propres associés à des valeurs propres différentes sont deux à deux en somme directe.
En notant $F = E_\lambda(u)$, on a $u_F = \lambda Id_F$. Donc, $\chi_{u_F}(X) = (X-\lambda)^{\dim(F)}$.
On détermine $E_\lambda(u)$ en résolvant l'équation $u(x) = \lambda x$. On peut aussi déterminer la dimension du sous-espace propre avec des informations sur χ_u.
4. Théorème de Cayley-Hamilton : $\chi_u(u) = 0$.
Lemme des noyaux : Pour $P_1, \ldots, P_r$ des polynômes premiers entre eux deux à deux, on a $Ker(P_1 \ldots P_r(u)) = \oplus_{i=1}^r Ker(P_i(u))$.
De plus, la projection $p_i \in \mathcal{L}(Ker(P_1 \ldots, P_r(u)))$ sur $Ker(P_i(u))$ parallèlement à $\oplus_{j \neq i} Ker(P_j(u))$ est un polynôme en $u_{Ker(P_1 \ldots, P_r(u))}$.
Si $P = P_1 \ldots P_r$ est un polynôme annulateur de u, on a alors :
$$E = Ker(0) = Ker(P(u)) = \oplus_{i=1}^r Ker(P_i(u)).$$
Cela donne une décomposition en somme directe de E, et chaque sous-ev $Ker(P_i(u))$ est stable par u.
Pour B une base adaptée à cette décomposition en somme directe, la matrice $Mat_B(u)$ est diagonale par blocs (blocs de taille $\deg(P_i)$).
5. Le sous-ev F est stable par u. Sur ce sous-ev, l'endomorphisme induit $(u - \lambda Id_E)_F = u_F - \lambda Id_F$ est nilpotent. L'ordre r' de nilpotence de $u_F - \lambda Id_F$ vérifie $r' \leq m$.
On a ainsi $\mu_{u_F}(X) = (X-\lambda)^{r'}$ et $\chi_{u_F}(X) = (X-\lambda)^{\dim(F)}$.

Exercice 16. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, et $u \in \mathcal{L}(E)$.
• On suppose que μ_u n'est pas scindé ou n'est pas à racines simples.
L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
Donner un exemple. • On suppose que μ_u est scindé.
Pour $Spec(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, on pose $F_i = Ker((u - \lambda_i Id_E)^n)$.
On note r_i la multiplicité de $(X - \lambda_i)$ dans μ_u. Donner une expression de F_i avec r_i.
Quel est le polynôme minimal de u_{F_i} ?
• On suppose que μ_u est scindé à racines simples.
Que vaut μ_u ? L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
• On suppose que χ_u est scindé à racines simples.
Que vaut μ_u ?

---

1. Si u est diagonalisable, avec $Spec(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, on sait que $\mu_u(X) = \Pi_{i=1}^r (X - \lambda_i)$.
Donc, μ_u est scindé à racines simples.
Ainsi, si μ_u n'est pas scindé ou pas à racines simples, u n'est pas diagonalisable.
Un exemple de tel endomorphisme est $X \mapsto AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. On sait que $r_i \leq \deg(\mu_u) \leq \deg(\chi_u) = n$.
Ainsi, d'après le cours, on a $F_i = Ker((u - \lambda_i Id)^n) = Ker((u - \lambda_i Id)^{r_i})$.
Sur F_i, on a $(u_{F_i} - \lambda_i Id_{F_i})^{r_i} = 0$.
Ainsi, $u_{F_i} - \lambda_i Id$ est nilpotent. D'après le cours, on sait que son indice est exactement r_i.
Ainsi, le polynôme minimal de u_{F_i} est $\mu_{u_{F_i}}(X) = (X - \lambda_i)^{r_i}$.
3. Les racines de μ_u sont les valeurs propres de u. Pour $Spec(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, comme μ_u est scindé à racines simples, on a ainsi $\mu_u(X) = \Pi_{i=1}^r (X - \lambda_i)$.
En utilisant le lemme des noyaux pour χ_u, on obtient :
$$E = Ker(\chi_u(u)) = \oplus_{i=1}^r Ker(u - \lambda_i Id_E).$$
L'espace E est une somme directe des sous-espaces propres de u, donc u est diagonalisable.
4. Les polynômes χ_u et μ_u ont les mêmes racines. Pour $Spec(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, on a $\Pi_{i=1}^r (X - \lambda_i) \mid \mu_u$.
Comme χ_u est scindé à racines simples, on a ainsi $r = n$ et $\chi_u(X) = \Pi_{i=1}^n (X - \lambda_i)$.
Cela donne $\mu_u \mid \chi_u$ et $\chi_u \mid \mu_u$, donc $\mu_u = \chi_u$.
Donc, u est diagonalisable.

Exercice 17. Soit E un ev de dimension m. Soient $d, s \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que s est nilpotent.
1. On prend $d = \lambda Id_E$. Montrer que l'on a $ds = sd$, puis que $\chi_d = \chi_{d+s}$. (On pourra se servir de $\chi_s(X)$)
2. On suppose $ds = sd$. Pour $Spec(d) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, on pose $F_i = Ker(d - \lambda_i Id_E)$. Quelles sont les valeurs de $\chi_{d_{F_i}}$ et $\chi_{d_{F_i} + s_{F_i}}$?
3. On suppose d diagonalisable et $ds = sd$. Montrer que l'on a $\chi_d = \chi_{d+s}$.
4. Est-ce encore vrai si $ds \neq sd$? (Si oui, le montrer. Si non, trouver un contre-exemple.)

---

1. On a $ds = \lambda s = sd$. Les deux endomorphismes commutent.
Comme s est nilpotent, d'après le cours on sait que $\chi_s(X) = X^n$.
C'est-à-dire, on a :
$$\det(X Id_E - s) = X^n$$
Donc
$$\det(X Id_E - (d+s)) = \det((X-\lambda) Id_E - s) = (X-\lambda)^n$$
Ainsi, on a $\chi_{d+s}(X) = (X-\lambda)^n = \chi_d(X)$.

2. Pour $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de d, on pose $F_i = Ker(d - \lambda_i Id_E)$.
Chaque sous-ev F_i est stable par d. Comme s commute avec d, chaque noyau $Ker(d - \lambda_i Id_E)$ est stable par s.
Donc, les endomorphismes induits d_{F_i} et s_{F_i} sont bien définis. Sur le sous-espace F_i, on a $d_{F_i} = \lambda_i Id_{F_i}$.
De plus, comme s est nilpotent, s_{F_i} est nilpotent.
Avec la question 1), on a donc
$$\chi_{d_{F_i}}(X) = (X - \lambda)^{\dim(F_i)} = \chi_{d_{F_i} + s_{F_i}}(X).$$

3. Maintenant, d est diagonalisable. Par théorème sur la diagonalisabilité, on a $E = \oplus_{i=1}^r F_i$.
Avec les résultats de cours sur le polynôme caractéristique et les endomorphismes induits, on a
$$\chi_d(X) = \Pi_{i=1}^r \chi_{d_{F_i}}(X) \text{ et } \chi_{d+s}(X) = \Pi_{i=1}^r \chi_{d_{F_i}+s_{F_i}}(X).$$
On en déduit donc avec la question 2) que $\chi_d(X) = \chi_{d+s}(X)$.

4. Le résultat est faux si d et s ne commutent pas (quand s ne laisse pas stables les sous-espaces propres de d). Voici un contre-exemple :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$
La première matrice est diagonalisable, de valeurs propres 1 et 2 et de polynôme caractéristique $X^2 - 3X + 3$. La deuxième matrice est nilpotente. La somme de ces deux matrices a pour polynôme caractéristique $X^2 - 3X + 1$.
Le polynôme caractéirstique et les valeurs propres de $d + s$ sont ainsi différents de ceux de d.

Exercice 18. Soit E un ev de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $S_u(x) = E$. Que peut-on dire sur μ_u ?
2. On suppose que u est diagonalisable avec n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $E = S_u(x)$.

---

1. On a montré en cours que pour tout $x \in E$, $x \neq 0$, en posant $F = S_u(x)$, on a $\mu_{u_F}(X) = \chi_{u_F}(X) = P(X)$, pour P un polynôme de degré $\dim(F)$.
Ainsi, si $E = S_u(x)$ pour un certain $x \in E$, on a $\mu_u = \mu_{u_E} = \chi_{u_E} = \chi_u$. Le polynôme minimal de u est de degré n.

2. Dans ce cas, on a $\chi_u(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$ et $\mu_u(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$.
Comme chaque sous-espace propre $E_i = Ker(u - \lambda_i Id)$ est de dimension au moins 1 et comme on a $E = \oplus_{i=1}^n E_i$ (d'après le lemme des noyaux et d'après le théorème sur la diagonalisation), tous les sous-espaces propres de u sont donc de dimension 1.
Soient $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs propres de u pour les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Alors, d'après le cours, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.
On pose $x = e_1 + \dots + e_n$. Montrons qu'on a $S_u(x) = E$.
Il faut donc montrer que la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre (et donc une base de E).
Trouver des coefficients $a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que $a_0 x + a_1 u(x) + \dots + a_{n-1} u^{n-1}(x) = 0$ est équivalent à trouver un polynôme $P(X) = a_0 + \dots + a_{n-1} X^{n-1}$ de degré au plus $n - 1$ tel que $P(u)(x) = 0$.
Comme les vecteurs e_i sont des vecteurs propres de u, on a :
$$P(u)(x) = P(u)(e_1 + \dots + e_n) = P(u)(e_1) + \dots + P(u)(e_n) = P(\lambda_1)e_1 + \dots + P(\lambda_n)e_n.$$
Comme la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, on a $P(u)(x) = 0$ si et seulement si $P(\lambda_i) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.
Or, on a $P(\lambda_i) = 0$ pour tout i si et seulement si $(X - \lambda_i) \mid P$ pour tout i, si et seulement si $\mu_u = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n) \mid P$.
Comme on cherche P avec $\deg(P) \leq n - 1 < \deg(\mu_u)$, le seul polynôme P possible est $P(X) = 0$.
Donc, la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre.

Autre méthode : On a $u(x) = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$.
Ainsi, pour tout $k \geq 0$, on a $u^k(x) = \lambda_1^k e_1 + \dots + \lambda_n^k e_n$.
Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$.
Posons $y = a_0 x + a_1 u(x) + \dots + a_{n-1} u^{n-1}(x)$.
Les coordonnées du vecteur y dans la base B sont ainsi :
$$(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_1^i, \dots, \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_n^i)$$
On reconnaît les coefficients d'une matrice de Vandermonde :
Posons $M = V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice de Vandermonde associée aux nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
Alors, pour $X = {}^t(a_0, \dots, a_{n-1})$, on a :
$$MX = {}^t(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_1^i, \dots, \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_n^i).$$
Comme les nombres λ_i sont tous distincts, la matrice de Vandermonde M est inversible.
Donc, on a $y = 0$ si et seulement si $MX = 0$, si et seulement si $X = 0$, si et seulement si $a_0 = \dots = a_{n-1} = 0$.
Cela démontre que la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre.

Exercice 19. Soit E un ev de dimension n. Soit $P \in \mathcal{K}[X]$. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent.

1. Déterminer $\chi_{P(g)}$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que $\chi_{P(\lambda Id_E+g)} = (X-P(\lambda))^n$.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé. On pose $Spec(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$. Déterminer $\chi_{P(u)}$. (On pourra utiliser $F_i = Ker((u-\lambda_i Id_E)^{m_u(\lambda_i)})$.)

---

1. Comme g est nilpotent, d'après le cours on a $\chi_g(X) = X^n$.
   Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_mX^m$.
   On a $P(g) = a_0Id_E + a_1g + \dots + a_mg^m$.
   Or, on a $a_1g + \dots + a_mg^m = g(a_1 + \dots + a_mg^{m-1})$. Comme g est nilpotent, cet endomorphisme est lui aussi nilpotent.
   Ainsi, l'endomorphisme $P(g) - a_0Id_E$ est nilpotent.
   Donc, le polynôme caractéristique de $P(g) - a_0Id_E$ est X^n :
   $$\det(XId_E - (P(g) - a_0Id_E)) = X^n.$$
   On obtient donc :
   $$\det(XId_E - P(g)) = \det((X-a_0)Id_E - (P(g) - a_0Id_E)) = (X-a_0)^n.$$
   Comme $a_0 = P(0)$, on a aussi : $\chi_{P(g)}(X) = (X-P(0))^n$.
2. On veut utiliser le résultat de la question 1.
   Dans la base $(1, (X-\lambda), (X-\lambda)^2, \dots)$ de $\mathbb{K}[X]$, le polynôme P s'écrit :
   $$P(X) = b_0 + b_1(X-\lambda) + \dots + b_m(X-\lambda)^m.$$
   On a alors : $P(\lambda Id_E + g) = b_0Id_E + b_1g + \dots + b_mg^m$.
   D'après les calculs de la question 1), on voit alors que $P(\lambda Id_E + g) - b_0Id_E = g(b_1 + \dots + b_mg^{m-1})$ est un endomorphisme nilpotent.
   Donc, on a $\chi_{P(\lambda Id_E+g)-b_0Id_E}(X) = X^n$ d'après le cours.
   Donc, on a
   $$\chi_{P(\lambda Id_E+g)}(X) = (X-b_0)^n.$$
   De plus, on remarque que $b_0 = P(\lambda)$, ce qui s'écrit : $\chi_{P(g)} = (X-P(\lambda))^n$.
3. On a $\chi_u(X) = \Pi_{i=1}^r (X-\lambda_i)^{m_u(\lambda_i)}$.
   On pose $F_i = Ker((u-\lambda_iId_E)^{m_u(\lambda_i)})$.
   D'après le lemme des noyaux, on a
   $$E = Ker(0) = Ker(\chi_u(u)) = \oplus_{i=1}^r F_i.$$
   Les sous-espaces F_i sont stables par u, donc ils sont stables par $P(u)$.
   D'après le cours, on a ainsi :
   $$\chi_{P(u)} = \Pi_{i=1}^r \chi_{P(u_{F_i})}.$$
   On va déterminer chaque $\chi_{P(u_{F_i})}$.
   Soit $1 \leq i \leq r$. Comme on a $F_i = Ker((u-\lambda_iId_E)^{m_u(\lambda_i)})$, l'endomorphisme $g_i = u_{F_i} - \lambda_iId_{F_i}$ (endomorphisme sur F_i) est donc nilpotent.
   En effet, pour tout $x \in F_i$, on a $g_i^{m_u(\lambda_i)}(x) = (u-\lambda_iId_E)^{m_u(\lambda_i)}(x) = 0$.
   On en déduit que u_{F_i} est de la forme : $u_{F_i} = \lambda_iId_{F_i} + g_i$, avec g_i nilpotent.
   D'après la question 2), le polynôme caractéristique de $P(u_{F_i})$ est donc :
   $$\chi_{P(u_{F_i})}(X) = (X-P(\lambda_i))^{\dim(F_i)}.$$
   On conclut donc que
   $$\chi_{P(u)}(X) = \Pi_{i=1}^r (X-P(\lambda_i))^{\dim(F_i)}.$$
   En prenant $P(X) = X$, on doit avoir $\chi_{P(u)} = \chi_u$.
   On en déduit donc que $\dim(F_i) = m_u(\lambda_i)$.
   Le résultat s'écrit ainsi :
   $$\chi_{P(u)}(X) = \Pi_{i=1}^r (X-P(\lambda_i))^{m_u(\lambda_i)}.$$

Exercice 20. Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $Spec(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

1. Donner la valeur de μ_f. Appliquer le lemme des noyaux à μ_f et f.
2. On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g^2 = f$. Montrer que f et g commutent.
3. En déduire que les vecteurs propres de f sont aussi des vecteurs propres de g.
4. Combien y a-t-il alors d'endomorphismes $h \in \mathcal{L}(E)$ tels que $h^2 = f$?

---

1. f possède n valeurs propres, donc μ_f est de degré au moins n. Comme on a aussi $\mu_f \mid \chi_f$, avec $\deg(\chi_f) = n$, on en déduit que $\mu_f(X) = \chi_f(X) = \Pi_{i=1}^n (X-\lambda_i)$.
   On a ainsi $E = \oplus_{i=1}^n Ker(f-\lambda_iId_E)$ d'après le lemme des noyaux.
2. On a $fg = g^3 = gf$. f et g commutent car f est un polynôme en g.
3. Comme f et g commutent, les sous-espaces propres de f sont stables par g. Or, ces sous-espaces propres sont tous de dimension 1. Ainsi, pour $x \in E$ un vecteur propre de f non-nul, on a $g(x) \in Vect(x)$. Cela veut dire que $g(x) = \lambda x$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, et donc que x est un vecteur propre de g.
4. L'endomorphisme f est diagonalisable. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de f. On a alors $Mat_B(f) = Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
   D'après la question 2, on a $g(e_i) = \gamma_ie_i$. Donc, $Mat_B(g) = Diag(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$.
   Vu que $g^2 = f$, cela implique que l'on a $\gamma_i^2 = \lambda_i$, $\forall 1 \leq i \leq n$.
   Vu que g existe, cela veut dire que les valeurs propres de f sont des carrés.
   Comme E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, cela veut dire que $\lambda_i \geq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.
   • Si $\lambda_i > 0$, on a 2 choix possibles pour γ_i.

• Si on a j tel que $\lambda_j = 0$, on a alors forcément $\gamma_j = 0$.
Ainsi, si tous les λ_i sont non-nuls, il existe 2^n endomorphismes h tels que $h^2 = f$. Pour un tel h, on a $Mat_B(h) = Diag(\pm\sqrt{\lambda_1}, \dots, \pm\sqrt{\lambda_n})$.
Sinon, il existe j tel que $\lambda_j = 0$. Il existe alors 2^{n-1} endomorphismes h tels que $h^2 = f$. (2 choix possibles pour les $n-1$ autres valeurs propres)

Exercice 21. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que les espaces $\mathrm{Ker}(u \circ (u - \mathrm{Id}))$ et $\mathrm{Ker}(u \circ (u + \mathrm{Id}))$ soient supplémentaires. Montrer que u est une symétrie vectorielle.

On pose $F = Ker(u^2 - u)$ et $G = Ker(u^2 + u)$.
L'endomorphisme induit u_F est annulé par $X^2 - X = X(X-1)$, et l'endomorphisme induit u_G est annulé par $X^2 + X = X(X+1)$.
Donc, sur $E = F + G$), u est annulé par $X(X-1)(X+1)$. On a $u(u^2 - Id_E) = 0$.
Pour montrer que u est une symétrie, il faut montrer que $u^2 - Id_E = 0$.
D'après le Lemme des noyaux, on a :
$F = Ker(u) \oplus Ker(u - Id_E)$ et $G = Ker(u) \oplus Ker(u + Id_E)$. Comme $F \oplus G$, on a $F \cap G = \{0\}$.
Cela implique que $Ker(u) = \{0\}$. En utilisant à nouveau le Lemme des noyaux, on obtient :

$$E = Ker(u(u^2 - Id_E)) = Ker(u) \oplus Ker(u - Id_E) \oplus Ker(u + Id_E) = Ker(u - Id_E) \oplus Ker(u + Id_E) = Ker(u^2 - Id_E)$$

et donc $u^2 - Id_E = 0$.

Autre méthode : Comme $Ker(u) = \{0\}$, on sait alors que u est inversible. Donc, $u(u^2 - Id_E) = 0$ implique que $u^2 - Id_E = 0$.

Exercice 22.
1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$ une décomposition en somme directe de E, avec F_i des sous-espaces stables par u.
Montrer que u est diagonalisable si et seulement si les endomorphismes induits u_{F_i} sont diagonalisables.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A^2 est diagonalisable.
Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $Ker(A) = Ker(A^2)$. (On pourra utiliser la première question)
3. Trouver un contre-exemple dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Soit $k \geq 2$. Montrer que $Ker(A^k) = Ker(A)$ si et seulement si $Ker(A) = Ker(A^2)$.
5. On suppose maintenant qu'il existe $k \geq 2$ tel que A^k est diagonalisable.
Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $Ker(A) = Ker(A^2)$.

---

1. Si u est diagonalisable, alors tous les endomorphismes induits u_{F_i} le sont d'après le cours.
Réciproquement, si les u_{F_i} sont diagonalisables, alors il existe des bases B_i de F_i formées de vecteurs propres pour les endomorphismes induits u_{F_i}.
Ces vecteurs propres sont aussi des vecteurs propres de u.
Comme $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$, la famille $B = \cup_i B_i$ est une base de E, et cette base est formée de vecteurs propres de u, donc u est diagonalisable.
2. Comme A^2 est diagonalisable, alors pour $Spec(A^2) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$, et $F_i = Ker(A^2 - \lambda_i I_n)$, on a $\mathbb{C}^n = \oplus_{i=1}^r F_i$.
Les sous-espaces F_i sont de la forme $Ker(P(A))$, donc ils sont stables par A. D'après la question 1), la matrice A est diagonalisable si et seulement si sa restriction à chaque sous-espace F_i est diagonalisable.
On pose $u : X \mapsto AX$ l'endomorphisme associé à A. Sur le sous-espace F_i, un polynôme annulateur de l'endomorphisme induit u_{F_i} est $X^2 - \lambda_i$.
• Si $\lambda_i \neq 0$, alors ce polynôme est scindé à racines simples. Donc u_{F_i} est annulé par un polynôme scindé à racines simples, donc il est diagonalisable.
• si tous les λ_i sont non-nuls, on a alors $Ker(A^2) = Ker(A) = \{0\}$, et A est bien diagonalisable.
• S'il existe j tel que $\lambda_j = 0$, on a $X^2 - \lambda_j = X^2$. Donc le polynôme X^2 annule u_{F_j}.
La matrice A est donc diagonalisable si et seulement si u_{F_j} est diagonalisable.
L'endomorphisme u_{F_j} est diagonalisable ssi son polynôme minimal est scindé à racines simples. Dans ce cas, u_{F_j} est diagonalisable ssi son polynôme minimal est X. C'est-à-dire, si et seulement si $u_{F_j} = 0$. C'est-à-dire si et seulement si $F_j = Ker(A^2) \subset Ker(A)$.
Or, comme on a toujours $Ker(A) \subset Ker(A^2)$, on en déduit que A est diagonalisable si et seulement si $Ker(A) = Ker(A^2)$.
3. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ car son polynôme caractéristique est $X^2 + 1$, mais on a $A^2 = -I_2$, qui est diagonalisable.
Dans $\mathbb{R}$ il existe des polynômes de degré 2 qui n'ont pas de racines.
4. Si $Ker(A) = Ker(A^2)$, d'après les propriétés sur l'indice d'un endomorphisme, on sait que $Ker(A^k) = Ker(A)$ pour tout $k \geq 2$.
Réciproquement, supposons que $Ker(A^k) = Ker(A)$ pour un $k \geq 2$. Comme on a $Ker(A) \subset Ker(A^2) \subset Ker(A^k)$, on en déduit que $Ker(A) = Ker(A^2)$.
5. On refait le même raisonnement qu'à la question 2).
Comme A^k est diagonalisable, alors pour $Spec(A^k) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$, et $F_i = Ker(A^k - \lambda_i I_n)$, on a $\mathbb{C}^n = \oplus_{i=1}^r F_i$.
Les sous-espaces F_i sont de la forme $Ker(P(A))$, donc ils sont stables par A. D'après la question 1), la matrice A est diagonalisable si et seulement si sa restriction à chaque sous-espace F_i est diagonalisable.
On pose $u : X \mapsto AX$ l'endomorphisme associé à A. Sur le sous-espace F_i, un polynôme annulateur de l'endomorphisme induit u_{F_i} est $X^k - \lambda_i$.
• Si $\lambda_i \neq 0$, alors ce polynôme est scindé à racines simples. Donc u_{F_i} est annulé par un polynôme scindé à racines simples, donc il est diagonalisable.
• si tous les λ_i sont non-nuls, 0 n'est pas une valeur propre pour A^k et pour A. On a alors $Ker(A^2) = Ker(A) = \{0\}$, et A est bien diagonalisable.

• S'il existe j tel que $\lambda_j = 0$, on a $X^k\lambda_j = X^k$. Donc le polynôme X^k annule u_{F_j}.
La matrice A est donc diagonalisable si et seulement si u_{F_j} est diagonalisable.
L'endomorphisme u_{F_j} est diagonalisable ssi son polynôme minimal est scindé à racines simples. Dans ce cas, u_{F_j} est diagonalisable ssi son polynôme minimal est X. C'est-à-dire, si et seulement si $u_{F_j} = 0$. C'est-à-dire si et seulement si $F_j = Ker(A^k) \subset Ker(A)$.
Or, comme on a toujours $Ker(A) \subset Ker(A^k)$, on en déduit que A est diagonalisable si et seulement si $Ker(A) = Ker(A^k)$, ssi $Ker(A) = Ker(A^2)$.

Exercice 23. Soit E un ev de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $Spec(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$, On écrit $\chi_u(X) = \Pi_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_u(\lambda_i)} Q(X)$, avec Q un polynôme sans racines.

1. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, que vaut $Q(X)$?
   Si u est diagonalisable, que vaut $Q(X)$?
2. On pose $F_i = Ker((u - \lambda_i Id_E)^{m_u(\lambda_i)})$.
   Montrer que l'endomorphisme induit u_{F_i} est de la forme :
   $$u_{F_i} = \lambda_i Id_{F_i} + n_i, \text{ avec } n_i \text{ nilpotent.}$$
3. On note $r(n_i)$ l'indice de nilpotence de n_i. Quel autre nombre entier est égal à $r(n_i)$?
4. On suppose que $Q(X) = 1$. Montrer alors que $u = d + m$, avec d endomorphisme diagonalisable et m endomorphisme nilpotent, $dm = md$, et d, m des polynômes en u. (On pourra commencer par trouver des polynômes en u qui conviennent.)

---

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a alors $Q(X) = 1$. Le seul polynôme unitaire et non-nul de $\mathbb{C}[X]$ qui n'a pas de racines est 1.
   Si u est diagonalisable, alors χ_u est scindé, donc $Q(X) = 1$.
2. Par définition, on a $n_i = u_{F_i} - \lambda_i Id_{F_i}$.
   Comme $F_i = Ker((u - \lambda_i Id_E)^{m_u(\lambda_i)})$, on remarque que le polynôme $(X)^{m_u(\lambda_i)}$ est un polynôme annulateur de n_i, donc n_i est un endomorphisme nilpotent.
   Et on a alors $u_{F_i} = \lambda_i Id_{F_i} + n_i$.
3. L'indice de nilpotence de n_i est l'indice de nilpotence de $u_{F_i} - \lambda_i Id_{F_i}$.
   Comme $F_i = Ker((u - \lambda_i Id_E)^{m_u(\lambda_i)})$, on sait d'après le cours que l'indice de nilpotence de n_i est égal à l'indice de $u - \lambda_i Id_E$, et cet indice est égal à la multiplicité de la racine λ_i dans $\mu_u(X)$.
4. Si $Q(X) = 1$, alors on a $E = \oplus_{i=1}^r F_i$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton et d'après le lemme des noyaux.
   Soit $p_i \in \mathcal{L}(E)$ la projection sur F_i parallèlement à $\oplus_{j \neq i} F_j$.
   D'après le lemme des noyaux, p_i est un polynôme en u.
   On pose $d = \lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_r p_r$.
   On pose alors $m = u - d$. Comme les p_i sont des polynômes en u, l'endomorphisme d est un polynôme en u, et l'endomorphisme m aussi.
   On a donc que $dm = md$ car deux polynômes en u commutent.
   De plus, les sous-espaces F_i sont des sous-espaces stables par u, donc par d et par m (car ce sont des polynômes en u).
   Sur le sous-espace F_i, on a
   $$d_{F_i} = \sum_{j=1}^r \lambda_j (p_j)_{F_i} = \lambda_i (p_i)_{F_i} = \lambda_i Id_{F_i}.$$
   De même, on obtient que
   $$m_{F_i} = u_{F_i} - d_{F_i} = u_{F_i} - \lambda_i Id_{F_i} = n_i.$$
   Donc, sur chaque sous-espace F_i on a d_{F_i} diagonal et m_{F_i} nilpotent.
   Le polynôme minimal de d_{F_i} est $X - \lambda_i$, et le polynôme minimal de m_{F_i} est $X^{r(n_i)}$.
   Donc, sur $E = \oplus_i F_i$, l'endomorphisme d est annulé par $(X - \lambda_1)\dots(X - \lambda_r)$. Cet endomorphisme est donc diagonalisable. L'endomorphisme m est annulé par $X^{\max(r(n_1),\dots,r(n_r))}$, donc il est nilpotent.
   On a bien trouvé que $u = d + m$ avec d et m qui conviennent.

Exercice 24. (*) Soient A et B deux matrices réelles carrées d'ordre n.

1. On suppose qu'il existe un polynome $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au moins égal à 1 et vérifiant $P(0) = 1$ et $AB = P(A)$.
   Montrer que A est inversible et que A et B commutent.
2. Si A est nilpotente et qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 1$ et $B = AP(A)$.
   Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(0) \neq 0$ et $A = BQ(B)$. (On pourra exprimer $B, B^2, \dots$ en fonction de $A, A^2, \dots$)

---

1. On peut donc écrire
   $$AB = P(A) = \alpha_n A^n + \cdots + \alpha_1 A + I_n$$
   $$A\left(B - \left(\alpha_n A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 I_n\right)\right) = I_n$$
   d'où , A est inversible et $A^{-1} = B - \left(\alpha_n A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 I_n\right)$.
   Puisque A commute avec A^{-1} et ses puissances, on en déduit que A commute avec
   $$B = A^{-1} + \alpha_n A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 I$$

2. Comme A est nilpotente, on a $\mu_A(X) = X^p$, et donc $A^p = O_n$. En écrivant $P(X) = a_0 + \ldots + a_m X^m$, avec $m \geq p$ (et éventuellement $\deg(P) < m$), la relation $B = AP(A)$ donne,

$$B = A + a_2 A^2 + \cdots + a_{p-1} A^{p-1},$$

car $A^p = A^{p+1} = \ldots = 0$. On en déduit qu'il existe des coefficients $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ tels que

$$\begin{aligned} B^2 &= A^2 + a_{3,2} A^3 + \cdots + a_{p-1,2} A^{p-1} \\ &\ldots \\ B^{p-2} &= A^{p-2} + a_{p-1,p-2} A^{p-1} \\ B^{p-1} &= A^{p-1} \end{aligned}$$

Comme $\mu_A(X) = X^p$, la famille $(A, A^2, \ldots, A^{p-1})$ est libre, et est une base de $Vect(A, \ldots, A^{p-1})$.
Ainsi, la famille $(B, B^2, \ldots, B^{p-1})$ est une famille échelonnée dans la base $(A, A^2, \ldots, A^{p-1})$. Cette famille est donc libre. C'est donc aussi une base de $Vect(A, \ldots, A^{p-1})$.
Ainsi, il existe des nombres $b_1, \ldots, b_{p-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$A = b_1 B + b_2 B^2 + \cdots + b_{p-1} B^{p-1}$$

ce qui détermine un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $A = BQ(B)$.
Avec l'écriture $B = AP(A)$, on en déduit que $A^k = 0$ implique $B^k = A^k.P(A)^k = 0$.
Avec l'écriture $A = BQ(B)$ on en déduit que $B^k = 0$ implique $A^k = B^k.Q(B)^k = 0$.
Donc, l'indice de nilpotence de A est égal à l'indice de nilpotence de B. Cela implique que $b_1 = Q(0) \neq 0$ (car sinon A serait un multiple de B^2, dont l'indice de nilpotence est strictement inférieur à celui de B).

Exercice 25. 1. Soient E un ev de dim n, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent.
Montrer que l'on a $\dim(Ker(u^k)) \geq k$, pour tout $1 \leq k \leq n$.

2. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Soit $Spec(v) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$.
On suppose que pour un $1 \leq i \leq r$, on a $\dim(Ker(v - \lambda_i Id)) > 1$.
Montrer que μ_v est un diviseur strict de χ_v.
3. Donner un exemple à 2) dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

---

1. Soit r l'indice de nilpotence de u.
On sait ainsi que la suite des $\dim(Ker(u^k))$ est une suite d'entiers strictement croissante pour $0 \leq k \leq r$, puis constante.
Comme u est nilpotent, on a $\dim(Ker(u)) \geq 1$.
On en déduit donc que pour $1 \leq k \leq r$, on a $\dim(Ker(u^k)) \geq k$.
D'après le cours, on a $u^r = 0$, donc $\dim(Ker(u^r)) = n$.
Ainsi, pour tout $r \leq k \leq n$, on a $\dim(Ker(u^k)) \geq k$.
2. On suppose par l'absurde que $\mu_v = \chi_v$.
Soit a_i la multiplicité de la racine λ_i dans $\mu_v(X)$.
On doit alors avoir $a_i = m_v(\lambda_i)$.
On pose $F = Ker((v - \lambda_i Id_E)^{a_i})$. On sait d'après le cours que $Ker((v - \lambda_i Id_E)^{a_i})$ est de dimension $m_v(\lambda_i)$.
D'après le cours, sur F, l'endomorphisme $v_F - \lambda_i Id_F$ est nilpotent d'indice a_i.
Comme $a_i = m_v(\lambda_i)$, on voit donc que $\dim(Ker(v_F - \lambda_i Id_F)^{a_i})) = a_i$.
Avec l'indice de nilpotence, cela implique aussi que la suite des $\dim(Ker((v_F - \lambda_i Id_F)^k))$ est strictement croissante pour $1 \leq k \leq a_i$.
Or, on a par hypothèse que $\dim(Ker(v_F - \lambda_i Id_F)) = \dim(Ker(v - \lambda_i Id_E)) > 1$.
Ces dimensions donnent donc a_i entiers distincts, et ces entiers sont compris entre 2 et a_i.
Cela est impossible.
Donc, on a $\mu_v \neq \chi_v$.
3. Pour $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\chi_A(X) = (X - \lambda)^2(X - 1)$ et $\mu_A(X) = (X - \lambda)(X - 1)$.

Exercice 26. 1. Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. A quel autre entier est égal $\dim(\mathbb{K}[B])$?

2. Pour $\lambda \in Spec(B)$, on écrit $\mu_B(X) = (X - \lambda)^k Q(X)$, avec $Q(\lambda) \neq 0$.
A quel autre entier est égal $\dim(Ker((B - \lambda I_n)^k))$?
3. Peut-on avoir $\dim(Ker((B - \lambda I_n)^k)) > \dim(\mathbb{K}[B])$?
4. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 1. Soit $n \geq \deg(P)$. Existe-t-il $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mu_A = P$?
A-t-on le même résultat pour un corps $\mathbb{K}$ quelconque ?

---

1. On a $\dim(\mathbb{K}[B]) = \deg(\mu_B)$. En effet, $\mathbb{K}[B]$ est un sous-ev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont une base est de la forme $(I_n, B, \ldots, B^{r-1})$. La dimension de ce sous-espace est égale au premier entier r tel que B^r est combinaison linéaire des B^i, $i < r$. Cela correspond avec le degré du polynôme minimal de B.
2. D'après le cours, k est l'indice de la matrice $(B - \lambda I_n)$, et $Ker((B - \lambda I_n)^k)$ est un sous-espace caractéristique de B. Sa dimension est égale à $m_B(\lambda)$, la multiplicité de $(X - \lambda)$ dans χ_B.
3. Oui, ces deux entiers ne sont pas fortement reliés. Par exemple pour $B = 0$ on a $\mu_B(X) = X$ et $\dim(Ker(B)) = n > 1 = \dim(\mathbb{K}[B])$.
4. Si P n'est pas unitaire, non.
On écrit $P(X) = X^m + a_{m-1} X^{m-1} \ldots + a_0$.
Sur $\mathbb{C}$, la réponse est oui, grâce aux propriétés de $\mathbb{C}$.
Le polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ est scindé, donc il possède au moins une racine λ.
On prend alors $A = Diag(C_P, \lambda I_{n-m})$, où C_P est la matrice compagnon du polynôme

P.
D'après le cours, le polynôme minimal de C_P est P. Le polynôme minimal de λI_{n-m} est $X-\lambda$.
D'après des exercices d'un TD précédent (et le cours), on a $\mu_A = ppcm(P(X),(X-\lambda)) = P(X)$.
Sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque, l'énoncé est faux en général. Si le polynôme P n'a pas de racines dans $\mathbb{K}$, non seulement la construction précédente ne marche pas, mais on peut construire des contre-exemples.
Si on prend $n = \deg(P)+1$, supposons par l'absurde avoir $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mu_A(X) = P(X)$.
Si n est un multiple de $\deg(P)$, il est facile de construire une matrice A telle que $\mu_A = P$, mais pour certaines valeurs de n cela ne peut pas marcher.
On a χ_A de degré $n = \deg(P)+1$ et $\mu_A \mid \chi_A$, donc on a $\chi_A(X) = P(X)(X-\lambda)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$.
Cela implique que λ est une valeur propre de A, donc une racine de μ_A. Mais $\mu_A = P$ n'a pas de racines, contradiction.

Exercice 27. Soient $A, B, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AM = MB$, avec $M \neq O$.

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A)M = MP(B)$.
2. Montrer que A et B ont une valeur propre en commun.

---

1. On a $A^2M = AMB = MB^2$ et ainsi de suite. On obtient par récurrence que $A^pM = MB^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Par linéarité, cela donne $P(A)M = MP(B)$.
2. Considérons $P = \chi_A$. La relation $P(A)M = MP(B)$ entraine $MP(B) = O_n$. Or on a $M \neq O_n$ donc la matrice $P(B)$ n'est pas inversible. On a donc $\det(P(B)) = 0$. Comme on est sur $\mathbb{C}$, on a
$$\chi_A(X) = P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$$
avec λ_i valeurs propres de A. Il existe donc $i \in \{1,\dots,n\}$ tel que
$$\det(\lambda_i I_n - B) = 0$$
Ainsi, A et B ont une valeur propre commune.

Exercice 28. Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E vérifiant
$$f^4 = f^2.$$
On suppose que 1 et -1 sont valeurs propres de f.
Montrer que f est diagonalisable.

- Si 1 et -1 sont les seules valeurs propres alors $f \in \mathrm{GL}(E)$ et la relation $f^4 = f^2$ donne $f^2 = \mathrm{Id}_E$ ce qui fournit un polynôme annulateur scindé à racines simples et permet de conclure.
- Si 1 et -1 ne sont pas les seules valeurs propres, c'est que 0 est aussi valeur propre car les valeurs propres figurent parmi les racines de tout polynôme annulateur.
f possède alors $3 = \dim E$ valeurs propres distincts, donc f est diagonalisable.

Exercice 29. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A^2 + A - I = O$.
A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
Montrer que $\det(A) = 1$.

On a $(X^3 - X^2 + X - 1)(X+1) = X^4 - 1$. Donc les racines de ce polynôme sont $i, -i, -1$.
A est annulée un polynôme à racines simples, donc A est diagonalisable sur C.
Pour que A soit diagonalisable ou trigonalisable sur $\mathbb{R}$, il faut qu'elle soit annulée par un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$, et en particulier il faut que son polynôme minimal soit scindé.
Comme μ_A divise $X^3 - X^2 + X - 1$, cela implique que $\mu_A(X) = X+1$, ce qui implique que $A = -I_n$.
Ainsi, si $A = -I_n$ alors A est bien évidemment trigonalisable et diagonalisable. Sinon elle n'est pas diagonalisable ni trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\chi_A(X) = (X+1)^a(X-i)^b(X+i)^c$. Comme A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on a $Tr(A) = a.1 + b.i + c.(-i)$. Puisque $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{R}$, la multiplicité de i est égale à celle de $-i$, $b = c$.
On a ainsi $\det(A) = 1^a.i^b.(-i)^b = 1$.

Exercice 30. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et u un endomorphisme sur E. On suppose qu'il existe deux polynômes $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux tels que $(PQ)(u) = 0$.
Montrer que l'on a
$$\operatorname{Ker} P(u) \oplus \operatorname{Im} P(u) = E.$$
Indice : Bézout.

Les polynômes P et Q étant premiers entre eux, on a donc des polynômes V, W vérifiant
$$PV + QW = 1.$$
En évaluant en u, on obtient la relation
$$\mathrm{Id}_E = P(u) \circ V(u) + Q(u) \circ W(u). \quad (*)$$

Soit $x \in \operatorname{Ker} P(u) \cap \operatorname{Im} P(u)$. Puique $Q(u) \circ P(u) = (PQ)(u) = 0$, on a $\operatorname{Im} P(u) \subset \operatorname{Ker} Q(u)$. On obtient donc $x \in \operatorname{Ker} P(u) \cap \operatorname{Ker} Q(u)$.
La relation $(*)$ donne alors

$$x = V(u) \circ P(u)(x) + W(u) \circ Q(u)(x) = 0_E.$$

Ces deux sous-espaces sont donc en somme directe. Il reste à montrer qu'ils sont supplémentaires (que leur somme donne E tout entier). En reprenant la relation

$$x = V(u) \circ P(u)(x) + W(u) \circ Q(u)(x) = 0_E,$$

On peut remarquer que $(VP)(u)(x) = P(u)(V(u)(x)) \in \operatorname{Im} P(u)$, et que $(WQ)(u)(x) \in \operatorname{Ker} P(u)$ car

$$P(u)((WQ)(u)(x)) = (WPQ)(u)(x) = 0_E.$$

On a donc bien obtenu que $E = Ker(P(u)) \oplus Im(P(u))$.
En fait, on a aussi montré que $Im(P(u)) = Ker(Q(u))$.

Exercice 31. Dire si les matrices suivantes sont diagonalisables, trigonalisables. Si oui, donner leur forme diagonale/triangulaire/de Dunford / de Jordan.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

---

1. On a $Tr(A) = 0$. On remarque un vecteur propre facile : pour $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ on a $Au = u$.
   On calcule le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$. Avec le vecteur propre u, on commence par l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + 3C_3$ afin de factoriser $(X+1)$ dans le calcul du déterminant.
   On obtient $\chi_A(X) = (X-1)(X^2 + X - 12)$.
   Après factorisation, cela donne $\chi_A(X) = (X-1)(X+4)(X-3)$.
   Donc A est diagonalisable, et il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP = \operatorname{Diag}(1, 3, -4)$.
2. On a $\chi_B(X) = (X-1)^3$. La matrice B trigonalisable. Elle est diagonalisable si et seulement si $\dim(Ker(B - I_3)) = 3$. On a $B - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est de rang 2, donc $\dim(Ker(B - I_3)) = 1$.
   Cette matrice n'est donc pas diagonalisable.
   On a de même $(B - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\dim(Ker((B - I_3)^2)) = 2$.
   On en déduit que $\mu_B(X) = (X-1)^3$.
   Le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre -1 est donc $Ker((B - I_3)^3)$, de dimension 3. Trigonalisation : La matrice B est triangulaire supérieure.
   Décomposition de Dunford : Pour $D = I_3$, on a I_3 diagonalisable (car diagonale). Comme $(B - I_3)^3 = 0$, la matrice $N = B - I_3$ est nilpotente. De plus, on a N qui commute avec $D = I_3$.
   Donc, la décomposition de Dunford de B est $B = I_3 + (B - I_3)$.
3. On a $\chi_C(X) = (X-1)(X-2)^2$. Cette matrice est trigonalisable.
   La matrice C est diagonalisable si et seulement si $\mu_C(X) = (X-1)(X-2)$, ou si et seulement si $\dim(Ker(C - 2I_3)) = 2$.
   On a $C - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est de rang 1, donc $\dim(Ker(C - 2I_3)) = 2$.
   Cette matrice est diagonalisable.
   Il existe donc une matrice inversible P telle que $P^{-1}CP = \operatorname{Diag}(1, 2, 2)$.
4. La matrice D est de rang 1. Donc, $\dim(Ker(D)) = n - 1$. Ainsi, on a $X^{n-1} \mid \chi_D(X)$.
   Cela donne $\chi_D(X) = X^n - Tr(D)X^{n-1} = X^n - nX^{n-1} = X^{n-1}(X - n)$.
   Le spectre de D est donc $\{0, n\}$. On a de plus $\dim(E_n(D)) = 1$.
   On a obtenu que $\dim(E_0(D)) = n - 1$.
   Ainsi, la matrice D est diagonalisable.
   Il existe donc une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}DP = \operatorname{Diag}(n, 0, \dots, 0).$$

Exercice 32. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure, avec $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{K}$ sur sa diagonale.

1. Montrer que A est trigonalisable.
2. Si $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_n$, montrer que la décomposition de Dunford de A est $A = \gamma_1 I_n + (A - \gamma_1 I_n)$.
3. On suppose que les γ_i ne sont pas tous égaux. On suppose que A est diagonalisable.
   Quelle est la décomposition de Dunford de A ?
   Donner un exemple.
4. On suppose que les γ_i ne sont pas tous égaux.
   Donner un exemple de matrice A, non diagonalisable, où la décomposition de Dunford de A n'est pas $A = Diag(\gamma_1, \dots, \gamma_n) + (A - Diag(\gamma_1, \dots, \gamma_n))$.

---

1. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = \Pi_{i=1}^n (X - \gamma_i)$. Il est scindé, donc A est trigonalisable.

2. Dans ce cas, on a $\chi_A(X) = (X-\gamma_1)^n$. Le théorème de Cayley-Hamilton nous dit que $(A-\gamma_1 I_n)^n = 0$.
   Donc, pour $D = \gamma_1 I_n$, $N = A - \gamma_1 I_n$, on a D diagonalisable, N nilpotente, $A = D+N$, et D et N commutent.
   On a obtenu la décomposition de Dunford de A.
3. Comme A est diagonalisable, on a $A = A + 0$. On a obtenu sa décomposition de Dunford.
   Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, pour $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.
4. Il faut deux valeurs propres différentes, et l'une au moins avec une multiplicité d'au moins 2. On prend alors $n \geq 3$. On prend par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   La matrice A est triangulaire supérieure. Elle est trigonalisable, mais elle n'est pas annulée par $(X-2)(X-1)$, donc elle n'est pas trigonalisable. ($A - I_3$ est de rang 2, donc noyau de dimension 1)
   Pour $D = Diag(1,2,1)$, la matrice D est bien diagonale et la matrice $N = A - D$ est bien nilpotente (car matrice triangulaire supérieure avec 0 sur la diagonale), et on a $A = D + N$. Mais, les matrices N et D ne commutent pas. Le calcul montre que $ND \neq DN$.
   Donc, ces matrices ne sont pas la décomposition de Dunford de A.

Exercice 33. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est trigonalisable.

1. Montrer que ${}^tA$ est trigonalisable.
2. On suppose A inversible. Montrer que A^{-1} est trigonalisable.
3. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $Q(A)$ est trigonalisable.
   Calculer $\chi_{Q(A)}(X)$ en fonction des valeurs propres λ_i de A.
   Déterminer $Spec(Q(A))$.

---

1. On a $\chi_{{}^tA}(X) = \chi_A(X)$. A est trigonalisable si et seulement si χ_A est scindé. Donc, ${}^tA$ est trigonalisable.
2. On a une matrice inversible P telle que $T = P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure.
   Comme A est inversible, on a alors $P^{-1}A^{-1}P(P^{-1}AP) = I_n$. Donc T est inversible, d'inverse $P^{-1}A^{-1}P$.
   Or, l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire supérieure. On a donc $P^{-1}A^{-1}P$ triangulaire supérieure, d'où A^{-1} trigonalisable.
3. On a déjà montré que pour $T = P^{-1}AP$, et $Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $P^{-1}Q(A)P = Q(T)$.
   Un polynôme en une matrice triangulaire est encore une matrice triangulaire, donc $Q(A)$ est trigonalisable.
   Pour $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ les coefficients diagonaux de T, on a vu en cours que les coefficients diagonaux de $Q(T)$ sont $Q(\gamma_1), \ldots, Q(\gamma_n)$.
   On a donc $\chi_A(X) = \chi_T(X) = \Pi_{i=1}^n (X-\gamma_i)$ et $\chi_{Q(A)}(X) = \chi_{Q(T)}(X) = \Pi_{i=1}^n (X - Q(\gamma_i))$.
   Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres de A.
   On a alors $\Pi_{j=1}^r (X-\lambda_j)^{m_A(\lambda_j)} = \chi_A(X) = \Pi_{i=1}^n (X-\gamma_i)$.
   On en déduit donc que $\chi_{Q(A)}(X) = \Pi_{j=1}^r (X - Q(\lambda_j))^{m_A(\lambda_j)}$.
   On a donc $Spec(Q(A)) = \{Q(\lambda_1), \ldots Q(\lambda_r)\} = Q(Spec(A))$.

Exercice 34. (*) Résoudre dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ les EDL :

1. $y"(x) - 2y'(x) = -y(x)$
2. $y"(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 4i$
3. $y"(x) + y(x) = 2x$
4. $y^{(n)}(x) = y(x)$

On pose $D : y \mapsto y'$ l'endomorphisme de dérivation.
Les équations se ramènent à résoudre $P(D)(y) = b$, pour P un polynôme et b une certaine fonction.

1. On a $P(D)(y) = 0$, avec $P(X) = X^2 - 2X + 1$. On cherche à déterminer $Ker(P(D))$.
   Comme $P(X) = (X+1)^2$ (-1 est une racine double), on a $Ker(P(D)) = Vect(x \mapsto \exp(-x), x \mapsto x\exp(-x))$ d'après le cours.
   Donc, y est solution de l'EDL si et seulement s'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $y(x) = (ax+b)\exp(-x)$.
2. On a $P(D)(y) = b$ pour $P(X) = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ et $b(x) = 4i$.
   Une solution particulière de l'EDL est $y_0(x) = 4i$.
   On détermine $Ker(P(D))$. D'après le cours, on a $Ker(P(D)) = Vect(x \mapsto \exp(2x), x \mapsto exp(3x))$.
   Ainsi, y est solution de l'EDL si et seulement s'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $y(x) = a\exp(2x) + b\exp(3x) + 4i$.
3. On a $P(D)(y) = b$, pour $b(x) = 2x$ et $P(X) = X^2 + 1 = (X-i)(X+i)$.
   Une solution particulière de l'EDL est $y_0(x) = 2x$.
   On détermine $Ker(P(D))$. D'après le cours, on a $Ker(P(D)) = Vect(x \mapsto \exp(ix), x \mapsto exp(-ix))$.
   D'après le cours d'équations différentielles (ou d'après les formules d'Euler), on a aussi $Ker(P(D)) = Vect(\cos, \sin)$. Ainsi, y est solution de l'EDL si et seulement s'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $y(x) = a\cos(x) + b\sin(cx) + 2x$.
4. On a $P(D)(y) = 0$, pour $P(X) = X^n - 1 = \Pi_{k=0}^{n-1}(X - \exp(\frac{2i.k\pi}{n}))$.
   D'après le cours, on a $Ker(P(D)) = Vect(x \mapsto \exp(\frac{2i.k\pi}{n}x), 0 \leq k \leq n-1)$.
   Ainsi, y est solution de l'EDL si et seulement s'il existe $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que $y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \exp(\frac{2i.k\pi}{n}x)$.

Exercice 35. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Est-elle trigonalisable ?
Si oui, donner sa forme triangulaire supérieure et sa décomposition de Dunford.
2. Calculer A^n, pour tout $n \geq 0$.

---

1. On obtient $\chi_A(X) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$.
Comme on a $A \neq I_2$, la matrice A n'est pas diagonalisable. Par contre, elle est trigonalisable.
Donc, il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $a \neq 0$.
Pour la décomposition de Dunford $A = D + N$, la patrie diagonalisable a ainsi comme valeur propre 1.
Une matrice diagonalisable avec une seule valeur propre est diagonale, donc $D = I_2$.
On a donc $N = A - D = A - I_2$, d'où $A = I_2 + (A - I_2)$.
2. On a $N^2 = 0$, la matrice N est nilpotente d'ordre 2.
On a $A^0 = I_n$.
Soit $n \geq 1$. Comme N et D commutent, la formule du binôme donne :
$A^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^n N^k \binom{n}{k} D^{n-k} = I_2 D^n \binom{n}{0} + ND^{n-1}\binom{n}{1}$. $A^n = D^n + nND^{n-1} = I_n + nN = I_2 + n(A - I_2)$. $A^n = \begin{pmatrix} 1-n & n \\ -n & 1+n \end{pmatrix}$.

Exercice 36. Trouver dans $\mathbb{C}$ les suites récurrentes linéaires solutions des équations suivantes :

1. $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$
2. $u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 1$
3. $u_{n+2} + u_n = 2n$
Résoudre aussi cette équation dans $\mathbb{R}$
4. $u_{n+m} = u_n$

On pose $D : u = (u_n)_{n\geq 0} \mapsto (u_{n+1})_n$ l'endomorphisme de décalage à gauche.
Les équations se ramènent à résoudre $P(D)(u) = b$, pour P un polynôme et b une certaine suite.

1. On a $P(D)(u) = 0$ pour $P(X) = X^2 - X - 1$. (cela donne la suite de Fibonacci, entre autres)
Les racines de ce polynôme sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
D'après le cours, on a $Ker(P(D)) = Vect(((\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)_n, (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n)_n)$. Ainsi, les suites solutions de l'équation sont de la forme :
$u_n = a(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + b(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$, avec $a, b \in \mathbb{C}$.
2. On a $P(D)(u) = b$ pour $P(X) = X^2 - 3X + 2 = (X-2)(X-1)$, et $b_n = 1$.
Pour $v_n = n$ on a $P(D)(v)_n = (n+2) - 3(n+1) + 2n = -1$.
Donc, la suite $-v$ est une solution particulière de l'équation.
D'après le cours, on a $Ker(P(D)) = Vect((1)_n, (2^n)_n)$.
Ainsi, les suites solutions de l'équation sont de la forme :
$u_n = a + b2^n - n$, avec $a, b \in \mathbb{C}$.
3. On a $P(D)(u) = b$ avec $P(X) = X^2 + 1 = (X-i)(X+i)$ et $b_n = 2n$.
Pour $v_n = n$, on a $P(D)(v)_n = (n+1) + n = 2n + 1$.
Pour $w_n = 1$, on a $P(D)(w)_n = 1 + 1 = 2$.
Donc, $(n - \frac{1}{2})_n$ est une solution particulière de l'équation.
D'après le cours, on a $Ker(P(D)) = Vect((i^n)_n, ((-i)^n)_n)$.
Ainsi, les suites solutions de l'équation sont de la forme :
$u_n = ai^n + b(-i)^n + n - \frac{1}{2}$, avec $a, b \in \mathbb{C}$.
Une autre base de $Ker(P(D))$ est $((i^n + (-i)^n)_n, (\frac{(i^n)-(-i)^n}{i})_n)$.
Ces deux suites sont à valeurs réelles.
On peut remarquer que les coefficients de la suite récurrence linéaire sont tous réels.
Ainsi, une solution réelle $(u_n)_n$ est simplement une solution complexe dont les coefficients sont réels.
De plus, pour toute solution complexe $(u_n)_n$, la suite $(Re(u_n))_n$ est encore une solution de l'équation, et cette solution est à coefficients réels.
Donc, les suites de $Ker(P(D))$ qui sont réelles sont exactement les combinaisons linéaires à coeffs réels de $(i^n + (-i)^n)_n$ et $(\frac{(i^n)-(-i)^n}{i})_n$.
On en déduit donc que les suites réelles solution de l'équation sont de la forme :
$u_n = a(i^n + (-i)^n) + b(\frac{(i^n)-(-i)^n}{i}) + n - \frac{1}{2}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
4. On a $P(D)(u) = 0$ avec $P(X) = X^m - 1 = \Pi_{k=0}^{n-1}(X - \exp(\frac{2i.k\pi}{m}))$.
D'après le cours, on a $Ker(P(D)) = Vect((\exp(\frac{2i.n.k\pi}{n}x))_n, 0 \leq k \leq n-1)$.
Ainsi, les suites solutions de l'équation sont de la forme :
$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \exp(\frac{2i.n.k\pi}{m})$, pour $a_0, \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{C}$.

Exercice 37. Déterminer l'ensemble des nombres réels a tels que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

---

1. $\chi_A = X(X-1)(X-a)$.
   - Si $a \neq 0, 1$ alors A est diagonalisable.
   - Si $a = 0$ alors $\mathrm{rg} A = 2$ donc $\dim(\mathrm{Ker}\,(A)) = 1 < m_0(A)$ et la matrice A n'est pas diagonalisable.
   - Si $a = 1$ alors $\mathrm{rg}(A - I) = 2$ et par le même argument qu'au-dessus, A n'est pas diagonalisable.

   On conclut : $\Omega = \{0, 1\}$.

Exercice 38. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

1. Montrer que $A^n = 0$.
2. Calculer $\det(A + I_n)$.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $AM = MA$.
   Calculer $\det(A + M)$. (On pourra commencer par le cas où $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$)
4. Le résultat est-il encore vrai si M ne commute pas avec A ?

---

1. On a $\mu_A \mid X^p$, donc A est une matrice nilpotente. Le cours nous dit que $\chi_A = X^n$, et le théorème de Cayley Hamilton nous donne $A^n = \chi_A(A) = 0$.
2. On a simplement $\det(A + I) = \chi_A(1) = 1$
3. Si M est inversible on a $\det(A + M) = \det\left(AM^{-1} + I\right) \det M$.
   Or A et M^{-1} commutent donc $\left(AM^{-1}\right)^p = 0$. La question 2) donne alors : $\det(A+M) = \det M$.
   Si M n'est pas inversible, introduisons les matrices $M_p = M + \frac{1}{p} I_n$.
   Comme M ne possède qu'un nombre fini de valeurs propres, il existe un entier p_0 tel que les matrices M_p sont inversibles pour tout $p \geq p_0$. Les matrices M_p commutent encore avec A. On a donc :
   $$\det(A + M_p) = \det M_p$$
   Or $\det M_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \det M$ et $\det(A + M_p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \det(A + M)$ (car det est une fonction polynômiale en les coefficients des matrices, donc continue).
   En passant à la limite, on obtient donc :
   $$\det(A + M) = \det M.$$
4. Si A et M ne commutent pas, c'est faux. Voici un contre-exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 39. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ non-nuls et distincts.
On pose $M = Diag(J_1(0), J_2(0), J_3(\lambda_1), J_2(\lambda_2), J_2(\lambda_2))$, une matrice diagonale par blocs.
On rappelle que les $J_r(\lambda) = \lambda I_r + N_r$ sont des blocs de Jordan. On pose $(e_1, \ldots, e_{10})$ la base canonique de $\mathbb{K}^{10}$.
• Déterminer χ_M.
• Déterminer μ_M.
• Pour chaque $\lambda \in Spec(M)$, déterminer $Ker(M - \lambda I_{10})$.
• On prend maintenant $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - \lambda)^2$ et celui de la div. eucl. par $(X - \lambda)^3$. (On pourra utiliser la formule de Taylor)
• Calculer $P(M)$ en fonction des matrices nilpotentes N_2, N_3 (matrices de taille 2 et de taille 3).

---

1. On a $\chi_M(X) = X.X^2.(X - \lambda_1)^3(X - \lambda_2)^2(X - \lambda_2)^2 = X^3(X - \lambda_1)^3(X - \lambda_2)^4$.
2. D'après les résultats de cours sur les blocs de Jordan, on a $\mu_M = X^2(X-\lambda_1)^3(X-\lambda_2)^2$.
3. D'après les résultats sur les blocs de Jordan, on a $Spec(M) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$.
   Chaque bloc de Jordan a un sous-espace propre de dimension 1.
   Pour $J_r(\lambda)$, on a $Ker(J_r(\lambda) - I_r) = Vect(e_1)$.
   On obtient ainsi que $Ker(M) = Vect(e_1, e_2)$, $Ker(M - \lambda_1 I_{10}) = Vect(e_4)$, $Ker(M - \lambda_2 I_{10}) = Vect(e_7, e_9)$.
4. On a $P(X) = Q(X)(X - \lambda)^2 + P(\lambda) + P'(\lambda)(X - \lambda)$
   et $P(X) = Q_2(X)(X - \lambda)^3 + P(\lambda) + P'(\lambda)(X - \lambda) + \frac{P''(\lambda)}{2}(X - \lambda)^2$.
5. On a $P(M) = Diag(P(J_1(0)), P(J_2(0)), P(J_3(\lambda_1)), P(J_2(\lambda_2)), P(J_2(\lambda_2)))$.
   Comme on connaît le polynôme minimal de $J_r(\lambda)$, on en déduit que
   $P(J_1(0)) = P(0)$, $P(J_2(0)) = P(N_2) = P(0) + P'(0)N_2$,
   $P(J_2(\lambda_2)) = P(\lambda_2)I_2 + P'(\lambda_2)(J_2(\lambda_2) - \lambda_2 I_2) = P(\lambda_2) + P'(\lambda_2)N_2$
   $P(J_3(\lambda_1)) = P(\lambda_1)I_3 + P'(\lambda_1)(J_3(\lambda_1) - \lambda_1 I_3) + \frac{P''(\lambda_1)}{2}(J_3(\lambda_1) - I_3)^3 = P(\lambda_1) + P'(\lambda_1)N_3 + \frac{P''(\lambda_1)}{2}N_3^2$.
   Donc, on a
   $P(M) = Diag(P(0), P(0) + P'(0)N_2, P(\lambda_1) + P'(\lambda_1)N_3 + \frac{P''(\lambda_1)}{2}N_3^2, P(\lambda_2) + P'(\lambda_2)N_2, P(\lambda_2) + P'(\lambda_2)N_2)$.

Exercice 40. On se place sur $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que $\langle P \mid Q \rangle = P(0)Q(0) + \int_0^1 P'(t)Q'(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Calculer $\langle X^p \mid X^q \rangle$ pour tous $p, q \geq 0$.
3. Soient F le sous-ev des polynômes constants et G l'ensemble des polynômes P admettant 0 pour racine.
   Montrer que les sous-espaces vectoriels F et G sont orthogonaux.
4. Obtenir à partir de la famille $(1, X, X^2, X^3)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$.

---

1. Cette fonction est une forme bilinéaire symétrique.
   On a $\langle P,P\rangle = P(0)^2 + \int_0^1 P'(t)^2 dt \geq 0$.
   On a $\langle P,P\rangle = 0$ si et seulement si $P(0)=0$ et $P'(t)=0$ pour tout $t\in[0,1]$. Comme P' est un polynôme, cela est équivalent à $P(0)=0$ et $P'(X)=0$. Cela est équivalent à $P(X)=0$.
   Cette fonction est donc bien un produit scalaire.

2. Soient $p,q\in\mathbb{N}$.
   Si $p=q=0$ On a $\langle 1,1\rangle = 1+0=1$.
   Si $p=0$ et $q\geq 1$, on a $\langle 1, X^q = 0+\int_0^1 0.qt^{q-1}dt = 0$.
   Si $q=0$ et $p\geq 1$, on a $\langle X^p, 1\rangle = \langle 1, X^p\rangle = 0$.
   Si $p\geq 1$ et $q\geq 1$, on a $\langle X^p, X^q\rangle = 0+\int_0^1 pqx^{p+q-2}dt = \frac{pq}{p+q-1}$.
3. On a $F=Vect(1)$ et $G=Vect(X^k,\, k\geq 1)$.
   Avec le produit scalaire $\langle .,.\rangle$, on a montré que 1 est orthogonal à X^k, $\forall k\geq 1$.
   Donc, 1 est orthogonal à $Vect(X^k, k\geq 1)=G$.
   Donc, $Vect(1)=F$ est orthogonal à G.
4. On a 1 de norme 1.
   On a X orthogonal à 1, et de norme 1.
   On a X^2 orthogonal à 1 mais pas à X. On considère alors le polynôme $P_2(X) = X^2 - \langle X^2, X\rangle X = X^2 - X$. Le polynôme P_2 est alors orthogonal à 1 et à X.
   On a $\langle P_2,P_2\rangle = \langle X^2,X^2\rangle - 2\langle X,X^2\rangle + \langle X,X\rangle = \frac{4}{3}-2+1=\frac{1}{3}$.
   On a X^3 orthogonal à 1, mais pas à X ni à X^2. On considère alors le polynôme $P_3(X) = X^3 - \langle X^3,X^2\rangle X^2 - \langle X^3, X\rangle X = X^3-\frac{3}{2}X^2 - X$. Le polynôme P_3 est alors orthogonal à 1,X,X^2, donc à $1, X, P_2$.
   On a $\langle P_3,P_3\rangle = \int_0^1 (3t^2-3t-1)^2dt = \int_0^1(9t^4-18t^3+3t^2+6t+1)dt = \frac{9}{5}-\frac{9}{2}+1+3+1$
   $\langle P_3,P_3\rangle = \frac{18}{10}-\frac{45}{10}+\frac{50}{10}=\frac{23}{10}=2.3$.
   Ainsi, la famille $(1,X,P_2,P_3)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_3[X]$. C'est aussi une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
   La famille $(1, X, \sqrt{3}P_2, \frac{1}{\sqrt{2.3}}P_3)$ est donc une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 41. • Montrer que les matrices suivantes sont trigonalisables dans $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

• Calculer leur polynôme minimal, et déterminer leur forme de Jordan.
• Déterminer la décomposition de Dunford de B, $B=D+N$. Combien vaut l'indice de nilpotence de N ?
• Calculer B^m, pour tout $m\geq 0$.

— Un calcul de déterminant donne $\chi_A(X) = (X+1)(X-1)^2$.
La matrice A est donc trigonalisable.
On a donc $\mu_A(X) = (X+1)(X-1)$ ou $\mu_A = \chi_A$.
Le calcul donne $E_1 = \mathrm{Vect}({}^t\!\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix})$, de dimension 1. Comme le sous-espace propre associé à 1 n'est pas de dimension 2, la matrice A n'est pas diagonalisable.
Son polynôme minimal est donc $\mu_A(X) = (X+1)(X-1)^2$ (**Note :** On pouvait aussi calculer $(A+I_3)(A-I_3)$). La forme de Jordan de A est donc la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il existe $P\in\mathscr{M}_3(\P)$ inversible, telle que $P^{-1}AP = T$.

— Un calcul de déterminant donne $\chi_B(X) = (X-1)^3$, donc B est trigonalisable.
On a donc $\mu_B(X) = (X-1)^k$ avec $k\in\{1,2,3\}$. On a $B\neq I_3$, donc $\mu_B(X)\neq X-1$, donc B n'est pas diagonalisable.
Le calcul montre que $(B-I_3)^2=0$. On a donc $\mu_B(X) = (X-1)^2$.
Avec la valeur de μ_B, on en déduit que la forme de Jordan de B est :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il existe $P\in\mathscr{M}_3(\P)$ inversible, telle que $P^{-1}BP = T$.

— Comme B est trigonalisable, avec $Spec(B)=\{1\}$, la décomposition de Dunford de B s'écrit : $B=D+N$ avec D diagonalisable, N nilpotent, et $DN=ND$.
D'après le cours on a $\chi_D = \chi_B$, donc $Spec(D)=\{1\}$. On a donc $D=I_3$.
Cela implique que $N = B-D = B-I_3$, et $B = I_3 + (B-I_3)$.

— Comme $\mu_B(X) = (X-1)^2$, on en déduit que $N=(B-I_3)$ est une matrice nilpotente d'indice 2.
On utilise alors la formule du binôme pour calculer B^m, quand $m\geq 1$:

$$B^m = (I_3 + (B-I_3))^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(B-I_3)^k I_3^{m-k}$$

$$B^m = \sum_{k=0}^{1}\binom{m}{k}(B-I_3)^k.1 = 1.I3 + m(B-I_3) = mB + (1-m)I_3.$$

Autre méthode : On peut effectuer la division euclidienne de P par $(X-1)^2$, pour obtenir $P(X) = (X-1)^2.Q(X) + P'(1)(X-1) + P(1)$ (découle de la formule de Taylor). En prenant $P(X) = X^m$ on obtient alors le résultat.

Exercice 42. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f\in\mathcal{L}(E)$. On définit l'application linéaire $F:\mathcal{L}(E)\to\mathcal{L}(E)$ par $F(u) = f\circ u$.

1. Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, F est diagonalisable. (On pourra regarder $P(F)$ pour $P\in\mathbb{K}[X]$)

2. Montrer que f et F ont le même polynôme minimal.
   En déduire que f et F ont les mêmes valeurs propres.
3. On suppose f diagonalisable. Soit λ une valeur propre de f.
   Etablir que $\dim E_\lambda(F) \geq \dim E \times \dim E_\lambda(f)$,
   puis que $\dim E_\lambda(F) = \dim E \times \dim E_\lambda(f)$.

---

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. On a $P(F)(u) = P(f) \circ u$, donc $P(f) = 0 \iff P(F) = 0$.
   Donc, f est diagonalisable ssi f est annulé par un polynôme scindé à racines simples, ssi F est annulé par un polynôme scindé à racines simples, ssi F est diagonalisable.
2. Comme $P(f) = 0$ ssi $P(F) = 0$, on en déduit d'après le cours que f et F ont le même polynôme minimal.
   Comme les valeurs propres sont les racines du polynôme minimal, f et F ont donc les mêmes valeurs propres.
3. Pour $u :\in \mathcal{L}(E)$ tel que $u(E) \subset E_\lambda(f)$, on a $F(u) = \lambda u$, donc $u \in E_\lambda(F)$. donc

   $$\dim E_\lambda(F) \geq \dim E \times \dim E_\lambda(f).$$

   Mais par diagonalisabilité, on a

   $$\dim \mathcal{L}(E) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(F)} \dim E_\lambda(F) \geq \dim E \times \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim E_\lambda(f) = \dim E^2 = \dim \mathcal{L}(E).$$

   On a donc l'égalité entre les dimensions :

   $$\dim E_\lambda(F) = \dim E \times \dim E_\lambda(f),$$

   pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$.